Universidade de Aveiro
Ano 2016/2017

Departamento de Matemática

Luísa Alexandra Carvalho de Oliveira

TAREFAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO BÁSICO COM RECURSO AO *GEOGEBRA*

Universidade de Aveiro

Ano 2016/2017

Departamento de Matemática

Luísa Alexandra Carvalho de Oliveira

TAREFAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO BÁSICO COM RECURSO AO *GEOGEBRA*

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Dr.ª Ana Maria Reis D' Azevedo Breda, Professora Associada com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho ao meu marido, filha, pais e alunos por todas as aprendizagens que faço com eles diariamente.

O Júri

Presidente

Prof. Doutora Andreia Oliveira Hall
Professora Associado da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (arguente)

Prof. Doutora Ana Maria Reis D' Azevedo Breda
Professora Associada com Agregação da Universidade de Aveiro (orientadora).

Agradecimentos

São vários os intervenientes, diretos e indiretos, e a maior parte deles nem imaginam que o são. Assim, não posso deixar de agradecer a cada um deles.

À Dr.ª Ana Maria Breda que foi uma fonte de inspiração para mim pelo seu empenho e pela sua forma simples e direta de orientação da dissertação. Muito obrigada pela sua partilha, por tudo o que me ensinou e por ter me ter incentivado.

Aos alunos participantes na investigação, *intervenientes diretos* na implementação das atividades em análise, pela pronta disponibilidade em aceitarem este desafio.

A todos os meus ex-alunos, pelas nossas aprendizagens conjuntas, principalmente por me permitirem aprender com eles e os quais foram fundamentais para a visão do ensino-aprendizagem que hoje tenho.

Ao meu marido e ao meu pai, os únicos conhecedores e a quem confidenciei esta vontade, por me terem apoiado, em todos os sentidos, desde a decisão inicial de avançar com este desafio e, principalmente ao meu marido, o qual soube compreender a minha dedicação à realização do mesmo. À minha mãe, que embora não soubesse que, durante este último ano letivo, estava a concretizar um dos seus sonhos também, por todo o apoio, principalmente por altura do nascimento da Maria Luís. Não tenho palavras suficientes para lhes agradecer.

À minha filha que, embora tenha apenas 4 meses, me acompanhou em todo este processo e se viu privada de alguns momentos comigo para que eu pudesse concretizar este sonho.

Palavras-chave Teoria de van Hiele, Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), Geometria, História da Matemática, Papiro de Rhind, 3.º ciclo do Ensino Básico

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo a construção e implementação de tarefas matemáticas com recurso a *applets* dinâmicos no *GeoGebra* promotoras à aprendizagem de conteúdos matemáticos lecionados no domínio Geometria e Medida (GM) nos 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade.

O domínio GM é um dos mais extensos e exigentes do atual Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico, em particular no 3.º ciclo.

Pretende-se utilizar as novas tecnologias, nomeadamente Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), associadas à aprendizagem de conteúdos matemáticos presentes neste domínio e nos diferentes anos de escolaridade do 3.º ciclo do Ensino Básico, e, simultaneamente, pretende-se aferir se a utilização deste tipo de *software* se revela um recurso motivador e facilitador do processo ensino-aprendizagem da Geometria. No desenvolvimento destas atividades, propuseram-se aos alunos tarefas que foram realizadas com recurso ao *software GeoGebra*.

O estudo segue uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, tendo sido realizada a recolha de dados através das argumentações dos alunos, de notas de campo, grelhas de observação e entrevistas através de gravações áudio. Este estudo efetuou-se com grupos de alunos do 7.º ao 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico, com o objetivo de analisar a utilização do *GeoGebra* como meio eficaz no processo ensino-aprendizagem. Recorreu-se a questionários e a testes de diagnóstico para averiguar o nível de raciocínio geométrico em que cada aluno se encontrava e a fichas de trabalho envolvendo diversas tarefas para serem resolvidas com recurso a *applets* elaborados com o *GeoGebra*.

As conclusões da investigação realçam a importância da utilização de AGD na aprendizagem em Geometria, em particular no desenvolvimento do raciocínio abstrato dos alunos e apontam as dificuldades manifestadas por eles.

No geral, os resultados observados indicam que o *GeoGebra* é um bom recurso de aprendizagem da Geometria, melhorando e motivando os alunos para essa aprendizagem.

Keywords

Van Hiele’s theory, Dynamic Geometry Systems, Geometry, History of Mathematics, Rhind Papyrus, 3rd cycle of Basic Education

Abstract

The main goal of this work is the construction and implementation of mathematical tasks that use dynamic *applets* in *GeoGebra* and that promote the learning of mathematical contents taught in Geometry and Measurement (GM) during the 7th, 8th and 9th grades.

GM is one of the most demanding and extensive domains of the current School Curricula regarding Basic Education, particularly in the three-year period mentioned above.

It is the purpose of this work to use new technologies, namely Dynamic Geometry Environments (DGE) associated both with the learning of mathematics and with the contents taught during the 7th, 8th and 9th) grades. At the same time, it is also our intention to verify whether a software of such nature can indeed act a facilitator and motivational element as far as the teaching-learning process of Geometry is related. During the development of these activities, students were asked to solve tasks using *GeoGebra software*.

The methodology supporting this study is qualitative. The data that were gathered were based on: students' arguments, field notes, observation grids and recorded audio interviews.

This study was carried out with groups of students attending the 7th, 8th and 9th grades, and aimed at analysing the effectiveness of *GeoGebra* in the teaching-learning process. Questionnaires and diagnostic tests were used to determine the level of geometric reasoning applied to each student. There were also used worksheets and exercises involving various tasks to be solved using applets created with *GeoGebra*.

The findings of this research highlight the importance of using DGE while teaching Geometry, especially because of the role these tools play in the development of students' abstract reasoning, at the same time they also draw one’s attention to their main difficulties.

In general, the results that were observed indicate that *GeoGebra* is a good learning resource to teach Geometry, motivating students and increasing their predisposition to the learning process.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

- Leonardo da Vinci

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Capítulo 1 – Introdução

1. Introdução

O presente documento foi realizado no âmbito do Mestrado em Matemática para Professores (2.º Ciclo), da Universidade de Aveiro, sob a orientação da docente Ana Maria Reis D'Azevedo Breda.

O seu desenvolvimento tem como propósito a elaboração de um conhecimento profissional baseado em investigações pedagógicas realizadas em turmas do 3.º ciclo do Ensino Básico, interligando o domínio *Geometria e Medida (GM)* com Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), mais concretamente, com recurso ao *software GeoGebra*.

Esta investigação tem como objetivo principal a promoção do desenvolvimento das aprendizagens, numa vertente de cumprimento do Programa em vigor bem como das Metas Curriculares, além de levar um pouco mais de História da Matemática para dentro da sala de aula, procurando que os alunos percebam que a Matemática é uma ciência que ocupa a mente de muitos desde séculos e que não é estanque, ou seja, tem evoluído com o pensamento.

Este documento tem como tema de fundo "Conceção e Implementação de Tarefas para o Ensino Básico com recurso ao *GeoGebra*". Pretende-se com este trabalho conceber, implementar e, se possível, avaliar uma coletânea de tarefas com recurso a *applets* dinâmicos que contribuam para a aprendizagem de conceitos, propriedades ou relações matemáticas ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico com vista no Ensino Secundário.

Esta escolha sustenta-se no facto de se constatar que os alunos nem sempre têm conhecimento de que a Matemática é dinâmica e não pode estar refém do papel, lápis e outros objetos como compasso, esquadro e transferidor.

1.1. Pertinência da Investigação

A aprendizagem de conceitos geométricos está, muitas vezes, associada a dificuldades por parte dos alunos dos vários ciclos de ensino, ao longo do seu percurso escolar, nomeadamente no 3.º ciclo. Este é um tema extenso e, por isso, bastante trabalhoso com um grande peso ao nível de avaliação externa. A tecnologia é uma ferramenta que surge naturalmente no dia a dia e as crianças/adolescentes nascem com uma capacidade quase inata para a utilizar. Por isso, não é de admirar que ela esteja presente também dentro de uma sala de aula. Se formos verificar, quase todas as escolas do país apresentam computadores, projetores e quadros interativos nas suas salas sendo que as próprias editoras, aquando do lançamento dos seus projetos – manuais escolares – incluem componentes digitais dedicadas a este tema (a que, muitas vezes, só os professores têm acesso) e situações/problemas que requerem os seus usos.

A integração de AGD no ensino surge como uma estratégia mais no processo de ensino-aprendizagem. A aliança entre o ensino-aprendizagem da Geometria e a tecnologia torna-se perfeita, surgindo esta última como motivação para a primeira, Gravina (1996) e Ponte et al. (2007). Esta aliança foi o motor para a realização desta investigação que teve como grupo alvo, alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico da Escola Secundária de Campo Maior.

1.2. Problemática, Objetivos e Questões de Investigação

O ensino da Geometria tem como objetivo principal o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos com destaque para a visualização e para a compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço (Ponte et al., 2007).

Está mais do que provado que as novas tecnologias influenciam a nossa forma de estar e podem potenciar a nossa aprendizagem. A utilização de programas de GD, como sugerido no Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico atual, no ensino-aprendizagem da Geometria apresenta aspetos importantes, como:

- os alunos terem a possibilidade de construir figuras geométricas e deste modo aprender técnicas de construção (Gravina, 1996);
- o professor pode dar ao aluno as figuras já construídas e cabe ao aluno deduzir as propriedades que as caracterizam (Aguiar, 2009; Gravina, 1996));
- é desejável que os alunos adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013).

Esta investigação procura contribuir, de forma particular, para a concretização dos seguintes objetivos gerais: promover o gosto pela matemática e desenvolver o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Para este trabalho, o qual se reveste de um caráter exploratório e investigativo, usámos:

- o *software* de Geometria Dinâmica (SGD) *GeoGebra*, como recurso de apoio a tarefas referentes aos subdomínios: “Semelhança de Triângulos” no 7.º ano; “Teorema de Pitágoras” no 8.º ano; “Trigonometria no Triângulo Retângulo” no 9.º ano;

- episódios da História da Matemática, nomeadamente na utilização de um problema geométrico presente no Papiro de Rhind sobre "Área de Quadriláteros Convexos", nos 7.º, 8.º e 9.º anos;

tendo em vista a promoção do interesse pela disciplina, o desempenho escolar, o envolvimento nas tarefas, a motivação, a autoconfiança, a autonomia e a satisfação pela aprendizagem.

No que se refere à utilização de episódios da História da Matemática, esta deve ser interpretada como uma estratégia didática, há muito tempo defendida, em vários países, por vários autores, como por exemplo Cajori (1896), entre outros, e o próprio NCTM (*National Council for the Teaching of Mathematics*), que em 1969 dedicou o livro do 31.º ano à História da Matemática como ferramenta de ensino. Segundo uma das propostas emanadas do 5.º Congresso Internacional de Educação Matemática, em 1984, a Matemática pode ser desenvolvida pelo aluno, mediante a resolução de problemas históricos e através da apreciação e análise das soluções apresentadas a esses problemas no passado.

Nesta investigação pretende-se analisar a influência da utilização do SGD *GeoGebra* no processo de ensino-aprendizagem dos temas a seguir referidos:

- "Semelhança de Triângulos";
- "Teorema de Pitágoras";
- "Trigonometria no Triângulo Retângulo";
- "Área de Quadriláteros Convexos".

O trabalho desenvolvido foi direcionado para os alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico e em conformidade com os seguintes objetivos:

(I) avaliar o desempenho dos alunos quando sujeitos a uma estratégia de ensino-aprendizagem baseada na utilização do *software GeoGebra* no estudo das propriedades dos triângulos e dos seus ângulos;

(II) identificar as perceções dos alunos sobre a estratégia de ensino-aprendizagem baseada na utilização do *software GeoGebra* no ensino das propriedades dos triângulos e dos seus ângulos.

Para a concretização do objetivo **(I)**, seguiram-se os seguintes procedimentos:

– elaboração de materiais de apoio ao processo ensino-aprendizagem: fichas de trabalho e *applets* em *GeoGebra*;
– construção de instrumentos de avaliação para medir o desempenho dos alunos: Teste de Diagnóstico, fichas de trabalho e grelha de observação;

- aulas com recurso ao SGD *GeoGebra*;
- recolha, organização, tratamento e análise dos dados.

No que se refere ao objetivo **(II)**, os procedimentos foram:

- elaboração e aplicação de um questionário a todos os alunos envolvidos na investigação;
- realização de entrevistas a alguns alunos;
- recolha, organização, análise e conclusão dos dados obtidos através do questionário e da entrevista.

Através de estudo de casos, esta investigação recai sobre a aprendizagem da geometria pelos alunos, utilizando o *software GeoGebra*, centrando-se o estudo na seguinte questão de investigação:

- Como é que o apoio de um SGD, como o *GeoGebra*, se torna num bom recurso de ensino-aprendizagem?

Esta questão foi o ponto de partida da investigação, a partir da qual foram pensadas quatro experiências de ensino, tendo-se utilizado diversas estratégias que permitissem motivar os alunos no decorrer da implementação das mesmas, como por exemplo: construção dos *applets* de modo que os alunos fossem o mais autónomos possível na sua manipulação; elaboração das tarefas com questões devidamente sequenciadas, que vão do reforço dos conteúdos já lecionados até à construção do novo conhecimento, incorporando, sempre que possível, episódios da História da Matemática. Desde o início do ano letivo que a utilização do *software* em questão foi uma constante nas aulas, tendo começado por fazer uma apresentação das potencialidades do mesmo; sempre que o tópico a abordar o permitia, foi utilizado, além de recurso, como estratégia, com construções realizadas nas aulas ou a utilização de *applets* pré-concebidos.

1.3. Organização do Relatório

Este trabalho está organizado em seis capítulos.

No primeiro capítulo - Introdução, contextualiza-se a pertinência da Investigação e apresenta-se o problema, os objetivos e as questões de investigação que conduziram a investigação.

No segundo capítulo – Enquadramento Teórico, apresenta-se o papel das tecnologias da informação e comunicação no ensino e educação matemática, enquadrando a investigação e descrevendo a aprendizagem da geometria com o uso das tecnologias.

No terceiro capítulo – Metodologia do Estudo, descreve-se a metodologia utilizada e que orientaram as diversas fases da investigação, caraterizando e fundamentando a metodologia adotada. É realizada a caracterização dos participantes envolvidos no estudo e dos instrumentos utilizados na recolha e análise dos dados, bem como a calendarização das várias fases que a investigação comportou.

No quarto capítulo – Conceção das tarefas e dos *applets* no *GeoGebra*, é apresentada uma pequena abordagem sobre *applets* no *GeoGebra*; justificações para algumas questões presentes nas tarefas seguindo-se o protocolo de construção base, ou seja, os comandos do *software* utilizados na conceção de cada *applet*. Por fim, é feita uma reflexão sobre as questões colocadas nas tarefas, apresentando-se uma reformulação das mesmas como proposta de melhoria, nas que assim se justifique.

No quinto capítulo – Experiência em Turmas do 3.º Ciclo: Análise e Interpretação dos Dados, é feita a descrição da investigação desenvolvida, onde são traçadas as sessões realizadas, com hiperligações às tarefas e aos *applets* de *GeoGebra*.

No sexto capítulo – Considerações Finais, apresentam-se as conclusões da investigação, assim como uma reflexão final sobre todo o processo e respetivas implicações enquanto pessoa e profissional.

Por último, seguem-se as referências bibliográficas que suportaram a investigação e os nove anexos que completam, suportam e clarificam o presente trabalho. Convém referir que as teses "Ambiente Computacional Adaptativo e Colaborativo para a Aprendizagem da Geometria" de Vanda dos Santos e "Os Problemas da Matemática – O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática" de Ida Gonçalves, bem como as dissertações "A utilização de *software* educativo na aprendizagem da Geometria por alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico" de Cristina Cadavez e "A promoção do sentido espacial na criança: uma experiência na Educação Pré-Escolar e no Ensino do Primeiro Ciclo do Ensino Básico" de Ana Novo, foram fontes de inspiração ao presente trabalho.

Capítulo 2 – Enquadramento Teórico

2. Enquadramento Teórico

Neste capítulo abordar-se-á a literatura que orientou e moldou o presente estudo, realçando as perspetivas de autores de referência na área.

Começaremos por descrever sumariamente a Teoria de van Hiele e o desenvolvimento do raciocínio geométrico e faremos uma leitura do atual Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico no 3.º ciclo, e, da utilização das tecnologias, referenciando o SGD *GeoGebra*, como apoio à aprendizagem da Geometria. Por fim, salientaremos a importância de trazer para a sala de aula a História da Matemática, que se constitui como um processo ativo na construção do conhecimento.

2.1. Aprendizagem da Geometria

2.1.1. A Teoria de van Hiele e o Desenvolvimento do Raciocínio Geométrico

A Teoria de van Hiele, também conhecida por Níveis de van Hiele ou o Modelo de van Hiele, constitui uma teoria do ensino e da aprendizagem em geometria, elaborado pelo casal holandês van Hiele.

A teoria insere-se na Didática da Matemática e, de forma mais específica, na Didática da Geometria.

Ideias básicas do modelo

A ideia subjacente ao modelo, de uma forma sucinta, é:

- A aprendizagem da Geometria faz-se passando por níveis graduais de pensamento, isto é, segundo uma sequência de níveis de compreensão dos conceitos.

Estes níveis têm as seguintes características:

- Não se pode alcançar o nível seguinte (n) sem se passar pelo nível anterior $(n-1)$, ou seja, o progresso dos alunos através dos níveis é invariante; essa progressão ocorre através da vivência de atividades adequadas e ordenadas.
- Em cada nível de pensamento, o que era implícito, no nível seguinte passa a explícito.
- Cada nível utiliza uma linguagem própria (símbolos linguísticos) e relações entre os objetos em estudo. Assim, não pode haver compreensão quando os conteúdos são dados num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno.

- A progressão entre os níveis depende mais da aprendizagem adequada do que da idade e da maturidade, ou seja, dois alunos com níveis distintos podem não se entender.

Níveis de Aprendizagem da geometria

O modelo apresenta cinco níveis de aprendizagem da geometria, podendo ser nomeados com os números de 0 a 4 (esta notação é a mais utilizada) ou utilizando a notação de 1 a 5, e são eles:

Nível 1: Visualização ou reconhecimento

Nível 2: Análise

Nível 3: Ordenação ou classificação (ou Dedução informal)

Nível 4: Dedução formal

Nível 5: Rigor

Características dos Níveis

Nível 1: Visualização ou reconhecimento

O aluno reconhece visualmente uma figura geométrica; tem condições para aprender o vocabulário geométrico, mas ainda não reconhece as propriedades de uma determinada figura.

Nível 2: Análise

O aluno identifica as propriedades de uma determinada figura e utiliza-as para resolver problemas, mas ainda não as separa por classes.

Nível 3: Ordenação ou classificação (ou Dedução informal)

O aluno ordena logicamente as propriedades das figuras, ou seja, é capaz de fazer a separação por classes, de acompanhar provas/demonstrações informais, mas não é capaz de construir outra(s).

Nível 4: Dedução formal

O aluno é capaz de fazer provas/demonstrações formais e de raciocinar num contexto matemático mais complexo, entendendo a Geometria como um sistema dedutivo.

Nível 5: Rigor

O aluno é capaz de comparar relações baseadas em diferentes axiomas. É neste nível que a geometria não euclidiana é compreendida.

Vejamos um exemplo concreto no ensino das Figuras Geométricas (retirado de http://slideplayer.com.br/slide/1609151/).

Nível	Comparação e nomenclatura das figuras geométricas:	Exemplo de atividades
1: Visualização ou reconhecimento	– as figuras são avaliadas pela sua aparência global; – os alunos só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras através das formas e não pelas suas propriedades.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de: • Quadrados; • Retângulos; • Paralelogramos; • Losangos; • Trapézios.
2: Análise	– análise das figuras em termos dos seus elementos; – reconhecimento/descrição das suas propriedades; – uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através das propriedades: • 4 lados iguais e 4 ângulos retos; • Lados opostos iguais e paralelos.
3: Ordenação ou classificação (ou Dedução informal)	As propriedades das figuras são ordenadas logicamente, ou seja: – Os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades de figuras e entre figuras. – Os alunos são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. – A inclusão de classes é compreendida. – Perceção da necessidade de uma definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra. – Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. – Os alunos não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas.	• Num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, então necessariamente os ângulos opostos são iguais. • Um quadrado é um retângulo porque possui todas as propriedades de um retângulo. • Descrição de um quadrado através das suas propriedades mínimas: - 4 lados iguais; - 4 ângulos retos.

	– Os resultados obtidos empiricamente são usados em conjunto com técnicas de dedução. – Os alunos são capazes de acompanhar provas formais, mas <u>não de alterar a ordem lógica da demonstração.</u>	
4: Dedução formal	A construção das definições baseia-se na perceção do necessário e do suficiente e as demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. – Domínio do processo <u>dedutivo</u> e das <u>demonstrações</u>. – Reconhecimento de <u>condições necessárias e suficientes.</u> – <u>Dedução</u> como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um <u>sistema axiomático.</u> – O aluno é capaz de construir demonstrações e não apenas memorizá-las. – Reconhece a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais do que um processo. – Faz a distinção entre uma afirmação e o seu recíproco. – Compreende a interação das condições necessárias e suficientes. – Compreende a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas,	• Demonstração das propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a igualdade de triângulos. • A geometria euclidiana como apresentada na disciplina de Matemática. • Fundamentos de Geometria Plana. • Fundamentos de Geometria Espacial.

	postulados, definições, teoremas e demonstrações.	
5: Rigor	É alcançado por poucos alunos, pois abarca os aspetos abstratos formais da dedução. – Capacidade de compreender demonstrações formais. – Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	• Geometrias não euclidianas. • Estabelecimento e demonstração de teoremas na geometria finita.

Propriedades do Modelo

Este modelo comporta várias propriedades dirigidas a professores/educadores, podendo orientá-los na tomada de decisões quanto ao ensino. São elas:

A. Sequencial

O aluno deve necessariamente passar, sucessivamente, pelos vários níveis.

O sucesso num nível pressupõe a assimilação das estratégias dos níveis anteriores.

B. Avanço

Progressão (ou não) de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade.

Segundo os autores, é possível ensinar a um bom aluno conteúdos que estejam acima do seu nível. Por exemplo:

- no domínio Números e Operações (NO): ensinar frações sem lhes dizer o significado de frações;
- no domínio GM: memorizar que "um quadrado é um retângulo" é recuar a um nível inferior e não há compreensão por parte do aluno.

C. Intrínseco e Extrínseco

Os objetos implícitos num nível tornam-se objetos explícitos no nível seguinte. Por exemplo:

Nível 1 – Percebe-se apenas a forma da figura. Entretanto, a figura é determinada pelas suas propriedades.

Nível 2 – A figura é analisada e os seus elemtentos e propriedades são desvendados.

D. Linguística

Cada nível tem os seus próprios símbolos e sistemas de relações que ligam esses símbolos. A observação "Correto" muda de significado conforme o nível.

Por exemplo:

Nível 1 e 2 – Considera-se que o quadrado pode ser diferente do retângulo.

Nível 3 – Considera-se que o quadrado é um retângulo.

E. Combinação inadequada

O aluno encontra-se num nível e o ano de escolaridade pressupõe outro nível: neste caso, a aprendizagem e progresso podem não ocorrer.

O professor, material didático, conteúdos e vocabulário encontram-se num nível mais elevado que o do aluno: neste caso, o aluno não será capaz de acompanhar o raciocínio que está a ser utilizado.

Fases da Aprendizagem

O progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou da maturidade do aluno. Por isso, o método, a organização do ano de escolaridade, os conteúdos e o material usado são fundamentais.

Os autores desta teoria propõem 5 fases sequenciais de aprendizagem:

<table>
<tr><td rowspan="2"><u>Fase 1:</u>
Interrogação / Informação</td><td colspan="2">O professor conversa com os alunos sobre o conteúdo em estudo, aproveitando para avaliar os seus conhecimentos anteriores e desenvolver atividades envolvendo os objetos de estudo do respetivo nível, como por exemplo:</td></tr>
<tr><td>ATIVIDADE</td><td>Atividades com o losango
(NÍVEL 2)
• O que é um losango?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>O que é um quadrado?
O que é um paralelogramo?
O que têm estas figuras de semelhante? E de diferente?
Um quadrado é um losango?
Um losango é um quadrado?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVOS</td><td>Conhecimento prévio dos alunos.
Mostrar aos alunos a direção dos estudos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><u>Fase 2:</u>

Orientação Dirigida</td><td colspan="2">Ocorre a exploração do conteúdo, através do material organizado pelo professor, e a realização de pequenas tarefas com o objetivo de suscitar respostas específicas e objetivas.</td></tr>
<tr><td>ATIVIDADE</td><td>Atividades com o Geoplano
Construir um losango com:
as diagonais iguais (um maior e outro menor).
4 ângulos retos.
3 ângulos retos.
2 ângulos retos.
1 ângulo reto.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><u>Fase 3:</u>

Explicação</td><td colspan="2">Baseando-se nas experiências anteriores, os alunos expressam e trocam as suas visões sobre o que observaram.
O papel do professor será observar e orientar os alunos no uso de uma linguagem precisa e adequada. É nesta fase que o sistema de relações de níveis fica evidente.</td></tr>
<tr><td>ATIVIDADE</td><td>Atividades com o losango
Quais as figuras e as propriedades que emergiram da atividade anterior?</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><u>Fase 4:</u>

Orientação Livre</td><td colspan="2">Realização de tarefas mais complexas, como tarefas com várias etapas, que podem ser concluídas de diversas maneiras, que promovam a aquisição de experiências e de autonomia.</td></tr>
<tr><td>ATIVIDADE</td><td>Dobra uma folha de papel ao meio, e depois outra vez ao meio.
Tenta imaginar que tipo de figura obterias se cortasses o canto formado pelas dobras.</td></tr>
</table>

		• Justifica a tua reposta antes de efetuares o corte. • Que tipo(s) de figuras obténs se cortares o canto segundo um ângulo de $30°$? E de $45°$? • Descreve os ângulos no ponto de interseção das diagonais. • O ponto de interseção está em que ponto das diagonais? • Porque é que a área do losango é dada pela metade do produto das duas diagonais?
Fase 5: Integração	Os alunos revêem e concluem o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode auxiliar nessa síntese fornecendo experiências e observações globais do que os alunos aprenderam. É importante que essas conclusões não apresentem nada de novo nem ideias discordantes.	
	ATIVIDADE	As propriedades do losango que emergiram seriam concluídas e as suas origens revistas.

Resultados da aplicação do modelo de van Hiele

Após algumas pesquisas (Rodrigues, 2007; Silva & Candido, 2007) sobre a aplicação do referido modelo em Grupos Experimentais (onde foram ministradas aulas com recurso a objetos do dia a dia e presentes na sala de aula e a uma atividade) e comparando o desempenho obtido em Grupos de Controlo (onde foram ministradas aulas expositivas, com recurso ao quadro e giz), conclui-se que a intervenção pedagógica não atingiu igualmente todos os alunos, obtendo-se melhores resultados nos Grupos Experimentais. Daqui se poderá concluir que a teoria de van Hiele contribuiu para a ampliação do conhecimento existente sobre o processo ensino-aprendizagem, levando os alunos a adquirirem mais conteúdos e competências com maior facilidade do que os que não foram submetidos a este modelo (embora outras variáveis não controláveis possam interferir em todo o processo).

2.1.2. A Geometria no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico

O programa e Metas Curriculares de Matemática (Bívar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013) em vigor, no domínio GM, refere no ponto destinado à apresentação dos conteúdos que no 1.º ciclo, "são apresentadas as noções básicas da Geometria, começando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares (…), a partir dos quais se constroem objetos mais complexos (…)." E, por outro lado "(…) A igualdade de ângulos é apresentada, inicialmente, por deslocamentos rígidos de três pontos levando à noção de igualdade de amplitude, associando-se a este princípio um importante critério geométrico prático de congruência de ângulos, baseado em igualdade entre segmentos de reta, que servirá de fundamento ao estudo da medida de amplitude de ângulos nos ciclos posteriores.". Já no 2.º ciclo, além do recurso a instrumentos de construção e medida, deverá recorrer-se também a programas de GD "são introduzidos alguns conceitos e propriedades – tão elementares quanto fundamentais (…). Tratando-se de uma etapa indispensável ao estudo sério e rigoroso da Geometria nos ciclos de ensino posteriores, os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem e que são pertinentes em cada situação. É também pedida aos alunos a realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de GD), sendo desejável que adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos.". Quanto ao 3.º ciclo, "(…) são apresentados alguns teoremas fundamentais, como o teorema de Tales ou de Pitágoras, que é visto, nesta abordagem, como uma consequência do primeiro. O teorema de Tales permite ainda tratar com rigor os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas propostas. Um objetivo geral dedicado à axiomática da geometria permite enquadrar historicamente toda esta progressão e constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos. (…) O 9.º ano é dedicado ao estudo de (…) razões trigonométricas (…).".

2.1.3. Geometria Dinâmica (GD)

2.1.3.1. A importância dos softwares de GD na aprendizagem da Geometria

O computador tem sido utilizado no ensino praticamente desde que surgiu. No entanto, nos últimos anos, e devido à grande expansão do uso da *Internet* no ensino, a utilização deste recurso teve um crescimento exponencial. O uso destes recursos, *Internet* e computador, pode trazer grandes benefícios no ensino da Matemática, sendo necessário, contudo, escolher programas adequados e uma metodologia que tire proveito das características positivas destes recursos. Um bom exemplo são os AGD, os quais podem trazer vários benefícios à aprendizagem. Estes ambientes já estão presentes em algumas calculadoras gráficas, podendo todos os alunos usufruir desta ferramenta individualmente sem ser necessário o uso de um computador por aluno ou que este seja apenas um mero observador na sala de aula.

O termo Geometria Dinâmica (GD) foi usado inicialmente por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc*. com o intuito de distinguir este tipo de *software* dos restantes *softwares* geométricos. Hoje em dia é largamente utilizado para especificar a Geometria utilizada no computador, ou seja, para designar programas interativos que permitam a elaboração e manipulação de objetos geométricos a partir das suas propriedades. Aqui, podem alterar-se as posições iniciais dos objetos sem que o redesenhamento automático da construção efetuada perca as propriedades originais. Esta possibilidade opõe-se à Geometria tradicional, a qual recorre à régua e ao compasso, e que é "estática", uma vez que após a realização da construção não é possível observar ou mesmo experimentar outras situações sem ter de recorrer a uma nova construção.

Segundo Montenegro (2005), no ensino básico, os alunos devem trabalhar com modelos sólidos e com material visual. Por outro lado, há um consenso alargado entre educadores matemáticos de como o uso do computador no ensino da Geometria pode contribuir para a promoção e desenvolvimento da visualização geométrica, Laborde (1998).

Dadas as características específicas da Geometria, esta é, naturalmente, uma das áreas da Matemática que mais benefícios recebe no que toca ao ensino-aprendizagem com o computador. A sua correta utilização pode tornar o ensino da Matemática, em geral, e em particular o da Geometria, muito mais eficiente, apelativo, rico e significativo, permitindo estabelecer conexões entre esta ciência com outras áreas do saber. Além disso, todos os intervenientes neste processo, professor e aluno, tiram grandes vantagens desta evolução: o professor pode criar/experimentar/sugerir novas situações, pondo o aluno à descoberta/prova, suscitando a curiosidade por parte deste; o aluno vivencia situações-problema e tem a oportunidade de descobrir, por si só, relações entre os objetos matemáticos. E estes momentos não estão cingidos a uma sala de aula: o professor pode elaborar exercícios interativos para serem resolvidos à distância, fomentando a autonomia dos seus alunos. Segundo Confúcio: *"O aluno ouve e esquece, vê e lembra-se, mas só compreende quando faz"*.

Da minha experiência enquanto professora registo que a utilização desta prática de ensino é cada vez mais recorrente e contribui para melhorar e cobrir as deficiências do ensino tradicional, trazendo uma motivação acrescida para os alunos. A GD chega, muitas vezes, onde não conseguimos chegar sem a sua utilização.

2.1.3.2. Potencialidades da GD

Os AGD oferecem uma variedade de potencialidades registando-se, entre outras, as seguintes:

- **Recursos**
  Os AGD comportam muitos tipos de recursos que vão desde simples questões de formatação (cores, espessura das linhas, …); à construção de figuras precisas e variadas e à medição (comprimentos, áreas, ângulos, …) de entidades geométricas sendo a componente interativa a de maior força (podemos observar em tempo real diversos tipos de acontecimentos). Outra possibilidade é a de podermos escolher as ferramentas a serem usadas suprimindo as que não queremos que sejam utilizadas. Temos ainda a possibilidade de gravar uma construção para ser, por exemplo, utilizada em outras situações.

- **Exploração e descoberta**
  Este tipo de ambiente proporciona duas maneiras de utilização diferentes:
  - **atividades de expressão**: o aluno é convidado a construir autonomamente os seus modelos geométricos com o objetivo de dominar os conceitos envolvidos na construção;
  - **atividades de exploração**: o aluno, mediante construções previamente elaboradas, é convidado a explorá-las com o objetivo de descobrir as propriedades invariantes das construções em estudo.

Em suma, quer na formação de conceitos quer na dedução de propriedades, podemos concluir que grande parte das dificuldades estão no aspeto estático da construção. Se passamos para uma construção dinâmica, ou seja, onde é possível aplicar movimento aos seus elementos, as particularidades da contingência da representação física mudam, e o que sobressai são as relações invariantes, ou seja as reais propriedades geométricas. Um dos aspetos importantes na investigação matemática é a abstração da invariância, mas para reconhecê-la, para ver o que permanece igual, devemos poder aceder à variação (Gravina, 1996).

2.1.3.3. Programas de Geometria Dinâmica (GD)

A par da evolução da tecnologia (*hardware*), surge a evolução dos programas (*softwares*) cada vez mais eficazes e, muitas vezes, mais simples e que elaboram situações mais complexas. No campo da educação, nomeadamente no ensino da Matemática, esta evolução reveste-se de especial interesse. Segundo Hoyles & Noss (2003), os programas de GD são vistos como "ferramentas pedagógicas para a exploração de um domínio matemático" (p. 10) e que "proporcionam um ambiente em que os alunos podem construir e experimentar com objetos geométricos e relações" (p. 10). Este tipo de programas, segundo Jones (2000), incentiva os alunos na elaboração de conjeturas o que os ajuda na comunicação matemática. Assim, a aprendizagem em Geometria pode ser facilitada pelo uso de *softwares* de GD e a utilização de tecnologias aumenta as hipóteses de envolver os alunos na resolução de tarefas matemáticas (NCTM, 2000). É claro que este tipo de *software* implica conhecimentos matemáticos quando as construções são elaboradas desde o início. No entanto, quando estas são previamente elaboradas para os alunos, fornecem um apoio mais rico na sala de aula, estimulando a curiosidade dos alunos e aguçando o seu espírito investigativo, conduzindo a conjeturas sobre diversas situações. Estes *softwares* disponibilizam ambientes de ensino e de aprendizagem nos quais os alunos experimentam, observam as propriedades matemáticas ou verificam conjeturas, muito mais facilmente do que em outros ambientes computacionais ou com o tradicional uso de papel e lápis (Marrades & Gutiérrez, 2000; Ruthven & Hennessy, 2002).

Existem vários *softwares* de GD disponíveis como por exemplo:

- *GeoGebra;*
- *Cabri Géométre*;
- *C.a.R.*;
- *Cinderella*;
- *Geometer's Sketchpad*.

O *software* escolhido para exploração das tarefas foi o *GeoGebra* uma vez que:

- é gratuito;
- a sua utilização é muito intuitiva;
- é muito utilizado pelos professores nas escolas;

- permite a adaptação a várias línguas;
- está acessível na *Internet* para *download*;
- é suportado em vários formatos para ser acessível nos diversos objetos tecnológicos.

2.2. A importância da História da Matemática na sala de aula

O ensino da Matemática não é só feito de tecnologias, tem na História uma forte âncora. É através da História que o passado e o presente se interligam, dando consistência ao presente e é a História que nos dá a visão da Matemática que hoje temos. A Matemática, embora em constante evolução, não é de hoje: tem a sua História! E esta começa por povos muito distanciados no tempo ou nas fronteiras geográficas, através de conceitos e algoritmos por eles desenvolvidos.

Para Ponte et al. (2007), o ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos do Ensino Básico, deveria ser orientado, entre outros, pelo desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência, em particular, o desenvolvimento nos alunos da compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspetos da sua história.

Um professor com informação e formação histórica poderá proporcionar um melhor espaço de aprendizagem e despertar curiosidade nos alunos. Uma aula que tenha problemas assentes numa vertente histórica é, sem dúvida alguma, muito mais rica!

Uma das formas apontadas na literatura para a integração na sala de aula é através de problemas históricos. Na perspetiva de Swetz (2004b), os professores de Matemática devem participar na procura e implementação de problemas históricos na sala de aula pela experiência gratificante e enriquecedora que é.

O documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia, e de onde provém grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática, é o papiro de Rhind. Foi comprado em Luxor, no Egito, em 1858, por Alexander Henry Rhind (1833 – 1863), advogado escocês, que tinha ido viver para o Egipto, por razões de saúde. Atualmente encontra-se no Museu Britânico.

2.2.1. O Papiro de Rhind

O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e consta de 87 problemas, em escrita hierática. Foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, daí ser conhecido também por papiro de Ahmes, que, por sua vez, o copiou de um texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

Os problemas foram enumerados de 1 a 87 pelo editor alemão A. A. Eisenlohr, em 1887 sendo que no documento original não há qualquer enumeração.

Na célebre edição de A. B. Chance (1927 – 1929), para cada problema há uma transcrição do conteúdo em hierático, como aparece no papiro, uma transliteração em hieróglifos e, ainda, a tradução em inglês.

De salientar as palavras de abertura do papiro de Rhind escritas por Ahmes e que revelam uma procura da Sabedoria, características dos povos orientais:

> *Método correto de calcular. O acesso ao conhecimento de tudo o que existe e de todos os segredos obscuros.*
>
> (Gillings, 1982, p.45)

Segundo Estrada et al. (2000), "o escriba escrevia no papiro da direita para a esquerda e a parte interior do rolo, em que as fibras horizontais estão na parte de cima (designada por recto em textos de língua inglesa) era escrita em primeiro lugar; a face oposta, com fibras verticais por cima (designada por verso em textos de língua inglesa) era escrita em segundo lugar.

Fazem parte do papiro:

- problemas aritméticos (operações com números inteiros e frações unitárias, decomposição em frações unitárias, divisão de broas de pão e problemas de complementação);
- resolução de equações (determinação de uma quantidade desconhecida e progressões aritméticas e geométricas);
- problemas geométricos (determinação do *seked* de uma pirâmide; área de um círculo; volume de um celeiro cilíndrico; volume de um tronco de pirâmide e área de um cesto).

Estes problemas dizem respeito à distribuição de broas de pão ou de canecas de cerveja por trabalhadores, cálculo da quantidade de cereais necessária para obter uma certa quantidade de pão ou de cerveja, determinação de áreas de campos e de volumes de celeiros". Vejamos a distribuição dos referidos problemas (retirado de http://matematicarev.blogspot.pt/2009/11/papiro-de-rhind.html).

1 a 6	Divisão de 1, 2, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 homens.
7 a 20	Multiplicação de diferentes frações por $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ou $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

21 a 23	Subtrações: $1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right)$, $1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right)$ $\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}\right)$.
24 a 29	Problemas de quantidades, envolvendo equações do 1.º grau com uma incógnita, resolvidas pelo método da falsa posição.
30 a 34	Problemas semelhantes aos anteriores, mas mais complicados (envolvendo frações) e resolvidos pelo método da divisão.
35 a 38	Problemas de *hekat* (medida de capacidade), envolvendo equações do 1.º grau com uma incógnita, mas ainda mais complexas que as anteriores, resolvidos pelo método da falsa posição.
39	Divisão de pães.
40	Divisão de pães envolvendo progressões aritméticas.
41 a 43	Volumes de contentores cilíndricos de cereais.
44 a 47	Volumes de contentores paralelepipédicos de cereais.
47	Tabela das frações de 1 *hekat*, como frações do olho de Hórus.
48 a 53	Áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos.
54 e 55	Divisão relacionada com área.
56 a 60	Problemas relacionados com pirâmides (*sekeds*, alturas e bases).
61 e 61B	Tabela de uma regra para encontrar $\frac{2}{3}$ de números ímpares e frações unitárias.
62	Problema de proporções, sobre metais preciosos e o seu peso.
63 e 65	Divisão proporcional de pães por um número de homens.
64	Problema envolvendo uma progressão aritmética.
66	Divisão de gordura.
67	Proporção de gado devido a impostos.
68	Divisão proporcional de cereais entre grupos de homens.
69 a 78	Problemas de pesos de pão e cerveja. Proporção inversa.
79	Progressão geométrica de razão 7.

80 e 81	Tabelas das frações do olho de Hórus.
82 a 84	Problemas (pouco claros) sobre a quantidade de comida de vários animais domésticos, como gansos e outras aves.
85	Escritura enigmática.
86 e 87	Apontamento de certas contas e incidentes (em parte perdido).

Há problemas que se podem classificar de práticos, numa sociedade que vive da agricultura, e em que a moeda de troca são os bens. Há outros com carácter menos prático, que apontam para um gosto da matemática por si própria; parecem questões meramente levantadas para o exercício do cálculo ou diversão.

Não há registo de teoremas ou de provas; a principal preocupação dos egípcios parecia ser a obtenção de um resultado útil. Algumas das suas fórmulas estavam apenas aproximadamente corretas, mas davam resultados aceitáveis para as necessidades práticas do dia a dia. Na grande dedicatória inscrita, de cerca de 100 a. C., no Templo de Hórus, em Edfu, há referência a numerosos terrenos quadriláteros que foram oferecidos ao templo. Para cada um deles, as áreas eram obtidas através do produto das médias de dois pares de lados opostos, ou seja, usando a fórmula:

$$A = \frac{1}{4}\,(a + c)(b + d)$$

onde a, b, c e d são os comprimentos de lados consecutivos. A fórmula está, obviamente, incorreta. Isto dá uma resposta relativamente precisa quando o terreno é aproximadamente retangular. O que é interessante é que esta mesma fórmula para área de um quadrilátero já tinha aparecido muitos anos antes na Antiga Babilónia.

Os problemas geométricos do papiro de Rhind são os problemas numerados de 41 a 60, e estão relacionados com as quantidades de grão armazenadas em celeiros de forma retangular ou cilíndrica, como já foi referido. Talvez a melhor "descoberta" dos egípcios na geometria bidimensional tenha sido o seu método para encontrar a área de um círculo, que aparece no Problema 50 do mesmo papiro. Relativamente à geometria tridimensional, a sua melhor proeza foi o cálculo do volume de uma pirâmide truncada.

Mas a quem seria destinado o papiro? Uma das ideias mais aceites é que se destinasse à iniciação dos escribas na arte do cálculo, tendo uma função similar à do manual escolar (van der Warden, 1954 apud Estrada, 2000a).

Uma vez que os papiros egípcios são compostos por problemas, e pelas suas resoluções, alguns dos quais elementares, supõe-se que eles tinham intenções puramente pedagógicas e que eram basicamente destinados ao ensino dos funcionários do estado, os escribas. A partir de papiros como este temos acesso a uma matemática elementar, com conteúdos muito semelhantes a alguns que são lecionados, atualmente, no ensino básico e secundário, sobre cálculo e geometria.

Capítulo 3 – Metodologia do Estudo

3. Metodologia do Estudo

3.1. Opções Metodológicas

Neste capítulo apresentam-se os estudos realizados aquando da aplicação das diferentes tarefas nos diferentes níveis do 3.º ciclo do Ensino Básico.

Durante as fases de aplicação das tarefas, pretendeu-se averiguar duas situações:

- como os alunos interagiam com o SGD *GeoGebra* uma vez que, a maior parte dos alunos, apesar de conhecer o *software*, nunca trabalhou com ele;
- o desenvolvimento das capacidades de visualização e raciocínio formal enquanto grupo e individualmente.

As tarefas foram propostas para serem aplicadas e realizadas durante as aulas pelos alunos. Têm graus de dificuldade semelhante e foram concebidas tendo em conta a exploração e a investigação das Metas Curriculares em causa, pois, à partida, não se sabe o grau de dificuldade que cada tarefa significa para um certo grupo de alunos (Ponte, 2003). As tarefas estão focadas na aprendizagem da Geometria, contemplando a promoção de várias competências, entre as quais o raciocínio dedutivo e indutivo, e o seu uso em situações concretas. Em todas as turmas participantes no estudo, aplicou-se um Teste Diagnóstico sobre as competências em geometria (segundo van Hiele) (Anexo A – Teste Diagnóstico (Alunos)) e um questionário TIC (Anexo B – Questionário TIC (Alunos)).

3.2. Caracterização dos Contextos – Escola Secundária de Campo Maior

3.2.1. Participantes do Estudo

A investigação, inicialmente, deveria abranger todas as turmas do 3.º ciclo do Ensino Básico da Escola Secundária de Campo Maior. No entanto, apenas uma colega do 9.º ano se mostrou disponível para aplicar as tarefas na sua turma (9.º B). A **Tarefa 6 – Parte I** foi a única tarefa aplicada numa outra turma do 9.º ano mas, uma vez que a turma não concretizou todas as fases da investigação, as observações não foram contempladas neste estudo.

3.2.1.1. Caracterização dos Grupos

Participaram na experiência duas turmas do 7.º ano, B e E (com 13 e 17 alunos, respetivamente), uma turma do 8.º ano, C (com 20 alunos), e uma turma do 9.º ano, B (com 16 alunos) (Tabelas 3.1. e 3.2.), do Ensino Básico, da Escola Secundária de Campo Maior, perfazendo um total de 66 alunos.

De referir que a turma do 7.º B apresenta 6 alunos repetentes (a frequentar o 7.º ano pela segunda vez) sendo 3 do género feminino e 3 do género masculino e a turma 9.º B apresenta apenas um aluno repetente que está a frequentar pela segunda vez o 9.º ano.

Tabela 3.1.: Distribuição dos alunos por turma e género.

	Turma				Total
Género	7.º B	7.º E	8.º C	9.º B	
Feminino	7	7	7	6	27
Masculino	6	10	11	10	37
Total	13	17	18	16	64

Tabela 3.2.: Distribuição dos alunos por idades.

	Turma				Total
Idade (anos)	7.º B	7.º E	8.º C	9.º B	
12	5	15	0	0	20
13	7	2	13	0	22
14	1	0	5	9	15
15	0	0	0	6	6
Mais de 15	0	0	0	1	1
Total	13	17	18	16	64

As duas turmas do 7.º ano são bastantes heterogéneas a vários níveis, nomeadamente de conhecimentos, empenho, comportamento e resultados académicos (Tabela 3.3.). Como se pode observar, o nível médio obtido no 1.º período pelos alunos do 7.º B correspondeu a, aproximadamente, 2,5 enquanto que, na turma 7.º E correspondeu a 3,5.

Tabela 3.3.: Distribuição dos alunos pelo nível obtido a Matemática no 1.º Período.

Nível	Turma				Total
	7.º B	7.º E	8.º C	9.º B	
2	6	3	6	8	23
3	7	2	8	6	23
4	0	12	4	2	18
Total	13	17	18	16	64
Média	2,5 (1 c.d.)	3,5 (1 c.d.)	2,9 (1 c.d.)	2,6 (1 c.d.)	2,9 (1 c.d.)

3.2.1.2. Organização do Espaço (sala)

As tarefas aplicadas nos 7.º e 8.º anos foram realizadas numa sala de informática da Escola Secundária de Campo Maior, a qual estava equipada com 10 computadores com acesso ao *software GeoGebra*. Dada a taxa de ocupação da mesma por outras turmas e o número de computadores disponíveis, as tarefas foram realizadas em grupos de dois alunos. Em relação à tarefa – Parte I aplicada no 9.º ano, não foi possível ser aplicada nas mesmas condições que as duas anteriores, tendo sido projetada para o grupo turma que ia dando sugestões de resolução da mesma.

3.2.1.3. Calendarização das Tarefas

Em cada turma, a aplicação das tarefas teve a seguinte calendarização (Tabela 3.4.):

Tabela 3.4.: Calendarização das tarefas (parte I e II) por turma.

Turma	Parte I	Parte II
7.º B	Terça-feira (dia 28 de março), das 8h30min às 10h, na sala 26	Quinta-feira (dia 20 de abril), das 10h25min às 11h55min, na sala 26
7.º E	Quinta-feira (dia 20 de abril), das 12h05min às 13h35min, na sala 26	Quarta-feira (dia 29 de março), das 14h35min às 17h, na sala 26
8.º C	Quarta-feira (dia 29 de março), das 10h25min às 11h55min, na sala 26	Segunda-feira (dia 3 de abril), das 15h30min às 17h, na sala 26
9.º B	Quinta-feira (dia 23 de fevereiro), das 8h30min às 10h, na sala 26	Quinta-feira (dia 20 de abril), das 8h30min às 10h, na sala 26

3.3. Instrumentos e Procedimentos de Recolha de Dados

Teste Diagnóstico de Geometria

A aplicação deste Teste Diagnóstico, de acordo com a teoria de van Hiele, teve como objetivo principal determinar, globalmente, o nível de van Hiele em que os diferentes alunos se encontram e avaliar possíveis alterações nesses níveis no final da intervenção em sala de aula.

O teste empregue resultou de uma adaptação, ao nível do ciclo em que os alunos se encontram, de um teste desenvolvido no âmbito do projeto Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry (CDASSG). Após a sua adaptação (Anexo C – Autorizações dos Encarregados de Educação e Anexo A – Teste Diagnóstico (Alunos)) utilizou-se para caraterizar o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Este Teste Diagnóstico tem por base competências em Geometria e é um teste de escolha múltipla construído com base em citações dos próprios van Hiele, para descrever os comportamentos dos alunos nos diferentes níveis (Usiskin, 1982). É composto por três grupos de questões, tendo cada um dos grupos cinco, quatro e quatro questões, respetivamente, os quais se referem aos níveis 1, 2 e 3 de van Hiele. O teste apresenta um total de 13 itens e cada item com 5 alternativas de resposta (Tabela 3.5.). De referir que o teste original contém 25 questões, abordando os cinco níveis de van Hiele. No entanto e segundo Usiskin (1982), no projeto CDASSG, o nível 5 não se aplica a este tipo de alunos.

Este Teste Diagnóstico foi aplicado no início da investigação. Na análise das respostas ao Teste Diagnóstico, optou-se pela escala de 1 a 5 para analisar o nível de van Hiele em que cada aluno se encontrava.

Tabela 3.5.: Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto.

	Contexto		
Conteúdo	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Visualização	1, 2, 3, 4, 5		
Análise		6, 7, 8, 9	
Dedução Informal			10, 11, 12, 13

Questionários TIC

Estes questionários foram aplicados aos alunos intervenientes na investigação e aos professores que lecionam Matemática no 3.º ciclo da Escola Secundária de Campo Maior.

O questionário TIC - Alunos (Tabela 3.6.) está dividido em três partes: dados do aluno (Parte I); Tecnologias de Informação e Comunicação (Parte II) e, a última parte, sobre o conhecimento e a utilização do SGD *GeoGebra* (Parte III). Este teste foi aplicado a todos os alunos da Escola Secundária de Campo Maior envolvidos na investigação e após a realização das tarefas propostas.

Tabela 3.6.: Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto.

	Contexto			
Conteúdo	Geral	Casa	Escola	Tarefas
Dados do Aluno	1.1., 1.2., 1.3., 1.4.			
Disponibilidade TIC		2.1.	2.2.	
Utilização das TIC	3.1., 6.1.	4.1.	5.1., 5.2.	
Utilização de SGD	7.1., 7.2.			
Utilização do *GeoGebra*	8.1., 8.3.			8.2., 8.4.

O questionário TIC - Professores (Tabela 3.7.) está dividido em quatro partes: dados do professor; Tecnologias de Informação e Comunicação; utilização do SGD *GeoGebra*; e a última parte, sobre atitude perante as TIC. Este teste foi aplicado a todos os professores (seis no total) que lecionam Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico da Escola Secundária de Campo Maior.

Tabela 3.7.: Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto.

	Contexto	
Conteúdo	Geral	Aulas
Dados do Professor	1.1., 1.2.	
Utilização das TIC	2.1.	2.2.
Utilização de SGD	3.1., 3.2., 3.3., 3.4., 3.5.	
Utilização do *GeoGebra*	4.1., 4.3., 4.4., 4.5., 4.6., 4.7.	4.2.
Atitude perante as TIC	5.1.	

3.4. Análise dos Dados

3.4.1. Calendarização das Intervenções da Investigação

A experiência teve, em cada ano de escolaridade, seis fases, sendo elas:

- 1.ª Fase – Explicitação da investigação

Nesta fase, a professora investigadora utilizou parte de uma aula de Matemática de cada uma das turmas envolvidas para pedir a colaboração dos alunos, explicando aos mesmos os objetivos da investigação, a sua pertinência, aplicação e as suas fases. Este primeiro contacto com os alunos foi estabelecido em fevereiro de 2017, onde foram também entregues as autorizações para os Encarregados de Educação (Anexo C – Autorizações dos Encarregados de Educação).

Esta fase teve a duração de, aproximadamente, 15 minutos, de uma aula.

- 2.ª Fase – Aplicação do Teste Diagnóstico de Geometria

Os alunos começaram por responder a um Teste Diagnóstico de Geometria que, tal como foi referido anteriormente, teve como finalidade determinar, globalmente, o nível de van Hiele em que os diferentes alunos se encontram. A tarefa teve a duração de, aproximadamente, 20 minutos, de uma aula.

- 3.ª Fase – Realização da(s) Tarefa(s) – Parte I

Consoante o conteúdo a abordar nos diferentes anos do 3.º ciclo, foram aplicadas as respetivas tarefas (Tabela 3.8.) que compunham a Parte I da investigação.

Tabela 3.8.: Distribuição das Tarefas da investigação – Parte I por ano de escolaridade.

Tarefa	Turma			
	7.º B	7.º E	8.º C	9.º B
1 – Critérios de Semelhança de Triângulos – LLL e AA	X	X		
2 – Critério de Semelhança de Triângulos – LAL	X	X		
3 – Decomposição de um Triângulo pela Altura referente à Hipotenusa			X	
4 – Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas			X	
5 – A. Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas: Semicírculos			X	
5 – B. Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas: Triângulos Equiláteros			X	
6 – A um Passo da Trigonometria no Triângulo Retângulo				X

- 4.ª Fase – Realização da Tarefa – Parte II

Nesta fase, a tarefa proposta era comum aos três níveis de ensino. No entanto, foi direcionada consoante o ano de escolaridade em que se encontravam e, por conseguinte, os níveis de conhecimento que os alunos possuíam no momento de aplicação da tarefa. À semelhança das tarefas anteriores, esta foi realizada nas mesmas condições, ou seja, numa sala de informática, na Escolas Secundária de Campo Maior, equipada com 10 computadores com acesso ao *software GeoGebra*.

De referir que, durante a aplicação das Tarefas – Parte I e II, foi preenchida em cada turma uma Grelha de Observação com registos de alguns alunos e da turma em geral os quais foram, na Fase 6, entrevistados.

- 5.ª Fase – Preenchimento do Questionário TIC – Alunos

Após a realização das tarefas, Parte I e II, os alunos responderam a um Questionário TIC. Esta fase teve a duração de, aproximadamente, 15 minutos de uma aula.

- 6.ª Fase – Realização das Entrevistas aos Alunos

Esta foi a única fase que se realizou fora do tempo destinado à aula de Matemática. Foi agendado com alguns alunos (6) de cada turma, os quais tinham sido, previamente, selecionados para o efeito, dados o seu perfil. Cada entrevista durou entre 5 e 10 minutos.

Todos os alunos das turmas 7.º B e E e 9.º B participaram em todas as fases da investigação. Já a turma 8.º C, apesar de ser composta por 20 alunos, apenas participaram nas Fases 3 a 6, 18 alunos, dado que dois se encontravam doentes durante estas fases.

Capítulo 4 – Conceção das tarefas e dos *applets* no *GeoGebra*

4. Conceção das tarefas e dos *applets* no *GeoGebra*

As aulas de Matemática nunca mais foram as mesmas desde que a tecnologia entrou na sala de aula e proporcionou recursos valiosos que não podíamos imaginar antes. Dar aulas apenas recorrendo ao giz, quadro e um livro nem sempre satisfaz os alunos (e o próprio professor) e sobrecarrega as tentativas de fazer um aluno compreender determinados conteúdos matemáticos.

Este trabalho propõe uma conceção de tarefas com recurso ao *GeoGebra* para alguns temas do domínio GM do 3.º ciclo do Ensino Básico do atual programa. Pretende abordar e englobar várias possibilidades de uso e aplicação em sala de aula, podendo essa abordagem ser realizada pelos alunos sob a orientação das tarefas elaboradas. Mais importante do que definir, talvez seja descobrir formas de organizar e conduzir atividades com recurso a SGD, como o *GeoGebra*, em contexto sala de aula.

A utilização de *software* matemático apresenta grandes vantagens, nomeadamente em termos de organização da informação, de oportunidade de colaboração e sociabilidade. É, ainda, importante salientar que essa utilização não pode ser algo isolado do contexto da aula ou dos recursos do professor. O uso desse tipo de *software* deve estar incluído nas aulas para que a sua utilização, por parte dos alunos, seja mais eficaz.

Tal como afirmam Gladcheff, Zuffi & Silva (2001), citando Misukami (1986), numa conceção pedagógica construtivista, por exemplo, é mais adequado o uso de *software* que permita a interação do aluno com os conteúdos matemáticos com a intenção de levá-los a inferir resultados a partir do teste das hipóteses que definiram, como é o caso do *software GeoGebra*. Já numa tarefa que tenha por objetivo, por exemplo, o reforço de determinadas capacidades, *softwares* que incentivem o "exercício e a prática" poderão ser a melhor opção.

Existe uma clara ligação entre a forma como concebemos algo e a forma como o colocamos em prática, e na conceção de tarefas/*applets* de Geometria é importante pela forma como se coloca em prática ou como se criam e organizam atividades dessa natureza para a sala de aula. Contudo, é preciso cuidado, pois algumas formas de se conceber *applets* matemáticos pode tornar a Matemática inviável para o contexto escolar.

Para nós, professores, é normal pensarmos sobre a utilização de estratégias de ensino-aprendizagem a partir da nossa realidade escolar. Assim, assume particular importância discutir/refletir/propor conceções de tarefas/*applets* que nos ofereçam diversas possibilidades de organização de atividades dessa natureza em sala de aula, para que possamos escolher ou até nos inspirarmos para criar uma possibilidade de acordo com as variáveis condicionantes do nosso contexto escolar e da nossa própria experiência profissional.

4.1. O que são *applets*?

Applets são aplicações interativas criadas com SGD, neste caso, com o *GeoGebra*. No entanto, para utilizar este *software* não é necessário construir um *applet*. Os *applets* podem ser manipulados *online* ou *offline*, através de computadores, *tablets* ou telemóveis, desde que o referido *software* esteja instalado. A sua principal função é auxiliar na compreensão dos conteúdos relacionados com diversas áreas, nomeadamente, a Matemática.

Os *applets* podem ser exportados para folhas de trabalho dinâmicas como Página *Web* (*html*), não necessitando de *Internet* para serem manipulados, bastando apenas um navegador *web*, com *plugin JAVA* instalado.

Para a construção dos *applets* no *GeoGebra*, foi feita uma planificação prévia, a qual contemplou quatro etapas fundamentais:

- Etapa I: Identificação dos objetivos matemáticos a serem alcançados;
- Etapa II: Elaboração de mecanismos matemáticos que permitissem a interação do utilizador, neste caso do aluno;
- Etapa III: Construção do arquivo no *GeoGebra* utilizando as ferramentas desse programa;
- Etapa IV: Guardar o arquivo da etapa anterior em "Folha de Trabalho Dinâmica como Página *Web*" (*html*), ou seja, um *applet*.

4.2. Conceção dos *applets*

Neste ponto são apresentados os objetivos que nortearam algumas das questões colocadas nas diversas tarefas bem como uma descrição dos comandos, do *software GeoGebra*, utilizados na conceção base de cada um dos *applets* usados na investigação.

Ao abrir o programa, surge-nos a janela inicial (Figura 4.1.) que pode ser dividida em várias folhas:

- Folha Algébrica (seta azul);
- Folha Gráfica 2D (seta verde), na qual podemos visualizar os eixos coordenados e o fundo quadriculado;
- Folha de Cálculo (seta laranja).

A seta rosa indica-nos a linha/Entrada de comandos e a seta vermelha indica-nos os comandos disponíveis consoante a Folha Gráfica 2D ou a Folha de Cálculo estiver selecionada.

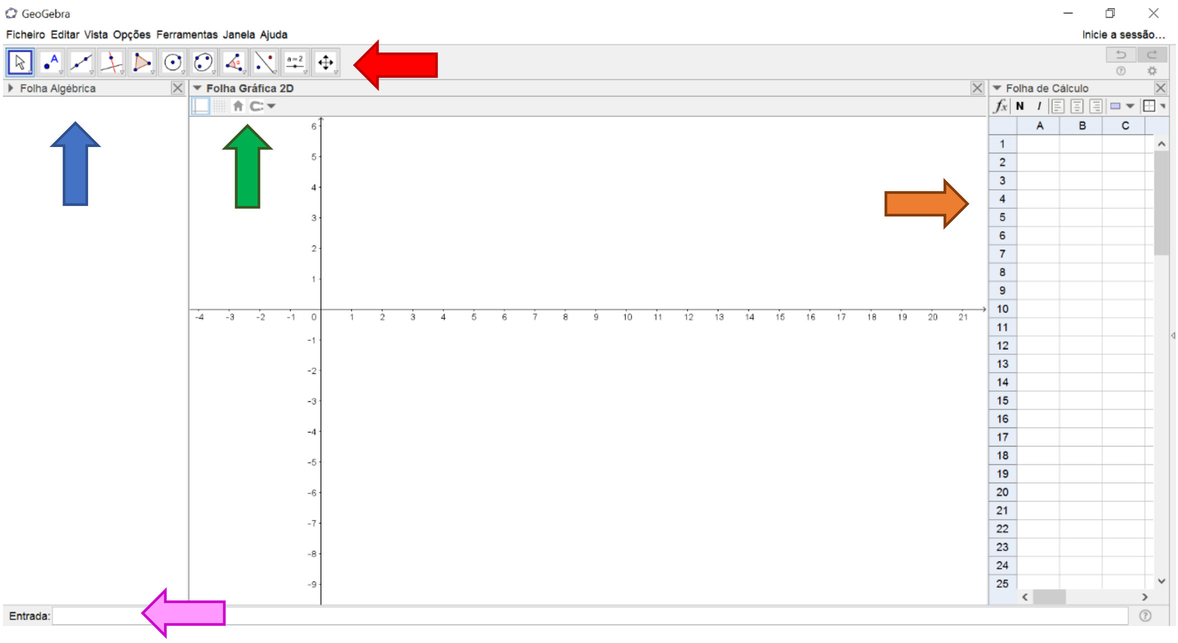


Figura 4.1.: Visualização da janela inicial do *GeoGebra*.

Tendo o *applet*, é possível visualizar toda a construção, desde o início até ao final, através do **Protocolo de Construção**. Para isso, basta seguir os passos: aceder ao menu **Vista** → **Protocolo de Construção** ou, simplesmente, **Ctrl + Shift + L**.

4.2.1. 7.º ano – Tarefas 1 e 2

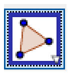
Tarefa 1 Esta tarefa, embora utilize o mesmo *applet* que o utilizado na Tarefa 2, tem como objetivo a conclusão de dois critérios de semelhança de triângulos, sendo eles os critérios Lado-Lado-Lado (LLL) e Ângulo-Ângulo (AA). (ver: Tarefa 1)

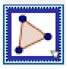
O porquê de algumas questões!

- **Critério LLL**

Questão	Objetivo
1.	Levar os alunos a utilizar/recordar a notação Matemática e indicar os lados correspondentes dos dois triângulos.
3.	A Folha de Cálculo permitirá visualizar, simultaneamente, as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos bem como a razão de semelhança entre os lados correspondentes dos dois triângulos.
4. a., b., c.	Os alunos, supostamente, adquiriram a noção de polígonos semelhantes e razão de semelhança. Pretende-se que consigam identificar o valor obtido na Coluna E da folha de cálculo como sendo a Razão de Semelhança e que concluam que os triângulos são semelhantes.
4. d.	Aquando da introdução do conceito razão de semelhança, os alunos trabalharam-no considerando, por exemplo, a figura A como sendo a original e a figura B a sua transformada e vice-versa, concluindo que a razão entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes se mantem invariante, embora inversa uma da outra.
6. e 7.	Pretende-se que os alunos identifiquem a transformação geométrica quando a razão de semelhança assume um valor positivo inferior/superior/igual a 1.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.
Construção do triângulo $[ABC]$:	
	**Polígono –** Construir um triângulo qualquer e identificar os seus vértices utilizando as letras A, B e C.
Construção do triângulo $[DEF]$:	
	**Seletor –** Definir um seletor $\boldsymbol{r}$ que será o indicador da razão de semelhança entre os dois triângulos.
	**Ponto D –** Assinalar o ponto D.

	**Circunferência de centro D e raio *rc* (d_2) –** Construir uma circunferência de centro no ponto D e raio $r \times \overline{AB}$.
	**Ponto E –** Assinalar o ponto E sobre a circunferência.
	**Circunferência de centro D e raio *rb* (e_2) –** Construir uma circunferência de centro no ponto D e raio $r \times \overline{AC}$.
	**Circunferência de centro E e raio *ra* (f_2) –** Construir uma circunferência de centro no ponto E e raio $r \times \overline{BC}$.
	**Ponto F –** Assinalar o ponto F, ponto de interseção das circunferências $\boldsymbol{e_2}$ e $\boldsymbol{f_2}$.
	**Polígono –** Construir o triângulo $[DEF]$ utilizando os pontos D, E e F.
	**Caixa para mostrar/esconder objetos (Booleano) –** Esconder a razão de semelhança $\boldsymbol{r}$, atribuindo a legenda **Razão de Semelhança**.
	**Distância ou Comprimento –** Medir os comprimentos dos lados dos dois triângulos.

- **Critério AA**

Questão	Objetivo
2.	Saber identificar quando duas figuras são uma ampliação / redução / isométricas.
4. e 5.	Pretende-se que os alunos, visualizando e comparando as medidas das amplitudes dos ângulos internos correspondentes dos dois triângulos e alterando a razão de semelhança, possam concluir o critério AA.
6.	Levar os alunos a concluir que apenas é necessário conhecer as medidas das amplitudes de dois dos ângulos internos correspondentes de dois triângulos para concluir quanto à semelhança destes.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Ângulo –** Medir a amplitude dos ângulos internos dos dois triângulos.

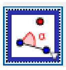
Tarefa 2 Esta tarefa tem como objetivo a conclusão do critério de semelhança de triângulos Lado-Ângulo-Lado (LAL). (Tarefa 2)

O porquê de algumas questões!

- **Critério LAL**

Questão	Objetivo
1.	Pretende-se que os alunos verifiquem que os três triângulos têm um ângulo com a mesma amplitude.
3.	Pretende-se que os alunos calculem a razão entre as medidas dos comprimentos de dois lados correspondentes dos triângulos indicados, bem como, indiquem a medida da amplitude do ângulo interno formado por esses dois lados, concluindo quanto à semelhança dos dois triângulos.
3. a. e b.	Embora os lados considerados sejam diretamente proporcionais, pretende-se que os alunos concluam que os triângulos não são semelhantes pois a medida da amplitude do ângulo interno não é igual.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.
Construção do triângulo $[GHI]$:	
	**Ponto I –** Assinalar o ponto I.
	**Circunferência de centro I e raio *GH* –** Construir uma circunferência de centro no ponto D e raio $\overline{GH}$.
	**Ponto G –** Assinalar o ponto G, pertencente à circunferência anterior.
Assinalar o ponto H:	
	**Ângulo com uma dada amplitude –** Selecionar o ponto G, depois o ponto I (vértice do triângulo) e, de seguida, a amplitude do ângulo, que neste caso é igual à amplitude do ângulo DFE.
	**Ângulo –** Medir a amplitude dos ângulos internos HGI e BAC.

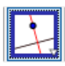
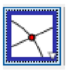
4.2.2. 8.º ano – Tarefas 3, 4 e 5

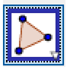
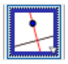
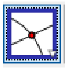
Tarefa 3 Esta tarefa tem como objetivo decompor um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa concluindo que os três triângulos resultantes são semelhantes entre si pelo critério de semelhança de triângulos Ângulo-Ângulo (AA). (Tarefa 3)

O porquê de algumas questões!

Questão	Objetivo
1.	Identificar os lados de um triângulo retângulo.
2.	Identificar os lados dos triângulos retângulos obtidos após a decomposição do triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa.
4.	Concluir quanto à semelhança entre os triângulos, comparando dois a dois, indicando o critério de semelhança utilizado e a relação entre os lados correspondentes nos dois triângulos. A questão **3.** pretende facilitar a conclusão quanto à semelhança entre os triângulos pois recorre a valores concretos, permitindo uma rápida comparação entre eles.
5. e 6.	Uma vez que os alunos concluíram que os três triângulos são semelhantes entre si, pretende-se generalizar para qualquer triângulo, indo ao encontro do Teorema de Pitágoras.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.
	**Reta (dois pontos) –** Construir a reta AB.
	**Ponto E –** Assinalar um ponto exterior à reta AB.
	**Reta (dois pontos) –** Construir a reta AE.
	**Reta Perpendicular –** Construir uma reta perpendicular à reta AE e que passe no ponto B.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar o ponto C, ponto de interseção da reta AE com a reta perpendicular a AE e que passa em B.

	**Polígono –** Definir o triângulo $[ABC]$.
	**Reta Perpendicular –** Construir uma reta perpendicular à reta AB e que passe no ponto C.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar o ponto D, ponto de interseção da reta AB com a reta perpendicular a AB e que passa em C.
	**Segmento de Reta –** Definir o segmento de reta $[CD]$ e formatá-lo para linha descontínua.
	**Ângulo –** Assinalar os ângulos internos dos três triângulos obtidos.

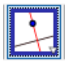
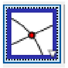
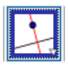
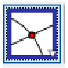
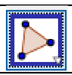
Tarefa 4 Esta tarefa tem como objetivo concluir que a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. (Tarefa 4)

O porquê de algumas questões!

Questão	Objetivo
7. e 8.	Visualizar os quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo e as medidas das respetivas áreas.
9. e 10.	Com a folha de cálculo, concluir que a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.
Construir um triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, como indicado no protocolo do *applet* da tarefa anterior.	
Construção de um quadrado $[ACDE]$, sobre o cateto AC:	

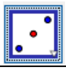
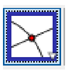
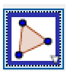
	**Reta Perpendicular –** Construir duas retas perpendiculares à reta AC, devendo uma passar no ponto A (AA') e outra no ponto C (CC').
	**Circunferência –** Construir uma circunferência de centro no ponto C e que contém A.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar o ponto D, ponto de interseção da reta CC' com a circunferência.
	**Reta Perpendicular –** Construir uma reta perpendicular à reta DC e que passe no ponto D.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar o ponto E, ponto de interseção da reta perpendicular à reta AA' e que passa no ponto D.
	**Polígono –** Definir o quadrilátero (quadrado) $[ACDE]$.
Construção de um quadrado $[AFGB]$, sobre o cateto AB: Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção do quadrado sobre o cateto AC.	
Construção de um quadrado $[CBIH]$, sobre a hipotenusa BC: Proceder do mesmo modo que foi utilizado nas construções dos quadrados sobre os catetos AC e AB.	
Formatar os quadrados com diferentes cores para mais facilmente se visualizarem.	
	**Área –** Obter a medida da área de cada um dos quadrados.

Tarefa 5 Esta tarefa tem como objetivo concluir que a relação obtida na tarefa 4 também é válida para outras figuras, nomeadamente para semicírculos e triângulos equiláteros. (Tarefa 5)

O porquê de algumas questões!

Questão	Objetivo
Todas	Visualizar os semicírculos/triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo retângulo e as medidas das respetivas áreas e concluir que a soma das medidas das áreas das figuras construídas sobre os catetos é igual à medida da área da figura construída sobre a hipotenusa.

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

<table>
<tr><th>Comando</th><th>Nome – Propósito da sua utilização</th></tr>
<tr><td></td><td>Mostrar/esconder objeto – Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construir um triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A, como indicado no protocolo do applet da Tarefa 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construção de um semicírculo de diâmetro $[AC]$, sobre o cateto $[AC]$:</td></tr>
<tr><td></td><td>Ponto Médio – Obter o ponto médio de AC e designá-lo por D.</td></tr>
<tr><td></td><td>Setor Circular – Construir o setor circular utilizando os pontos D (para o centro), A e C.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construir um semicírculo de diâmetro $[AB]$, sobre o cateto $[AB]$:
Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção do semicírculo sobre o cateto $[AC]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construir um semicírculo de diâmetro $[BC]$, sobre a hipotenusa $[BC]$:
Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção dos semicírculos anteriores.</td></tr>
<tr><td></td><td>Área – Obter a medida da área de cada um dos semicírculos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formatar os semicírculos com diferentes cores para mais facilmente se visualizarem.</td></tr>
<tr><td></td><td>Caixa para mostrar/esconder objetos (Booleano) – Esconder os semicírculos e as medidas das suas áreas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construção de um triângulo equilátero de lado $[BC]$, sobre a hipotenusa $[BC]$:</td></tr>
<tr><td></td><td>Circunferência – Construir duas circunferências: uma de centro no ponto C e que contém B e outra de centro em B e que contém C.</td></tr>
<tr><td></td><td>Interseção de dois objetos – Assinalar o ponto G, ponto de interseção das duas circunferências.</td></tr>
<tr><td></td><td>Polígono – Definir o triângulo equilátero $[CBG]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construir um triângulo equilátero de lado $[AB]$, sobre o cateto $[AB]$:
Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção do triângulo equilátero sobre a hipotenusa $[BC]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Construir um triângulo equilátero de lado $[AC]$, sobre o cateto $[AC]$:</td></tr>
</table>

Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção dos triângulos equiláteros anteriores.

	**Área –** Obter a medida da área de cada um dos triângulos equiláteros.

Formatar os triângulos equiláteros com diferentes cores para mais facilmente se visualizarem.

	**Caixa para mostrar/esconder objetos (Booleano) –** Esconder os triângulos equiláteros e as medidas das suas áreas.

4.2.3. 9.º ano – Tarefa 6

Esta tarefa tem como objetivo visualizar vários triângulos retângulos (3) com um vértice comum concluindo que eles são semelhantes entre si pelo critério de semelhança Ângulo-Ângulo (AA) e conhecer as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo num triângulo retângulo. (Tarefa 6)

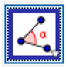
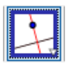
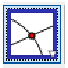
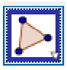
O porquê de algumas questões!

Questão	Objetivo
1. e 2.	Visualizar os três triângulos retângulos com dois ângulos geometricamente iguais, sendo um deles comum aos três triângulos e concluir que eles são semelhantes entre si pelo critério de semelhança Ângulo-Ângulo (AA).
3., 4., 5. e 6.	Concluir que as razões entre as medidas dos comprimentos de dois lados correspondentes em qualquer um dos triângulos é invariante (devido ao facto de os triângulos serem semelhantes) e designar cada uma destas razões por uma das razões trigonométricas, respetivamente.
7.	Apesar de se alterar o ângulo comum aos triângulos, as razões não se alteram.
8.	Extrapolar para outros triângulos semelhantes aos dados.
9.	Ao utilizar a Folha de Cálculo, visualizar os valores das razões trigonométricas $seno$ e $cosseno$ concluindo sobre entre que valores estes variam.

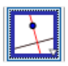
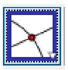
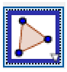
Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	Nome – Propósito da sua utilização
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.

Construção de um triângulo retângulo $[ABC]$, retângulo em A e em que o ângulo interno CBA possa ser alterado para uma amplitude qualquer:

	**Reta (dois pontos) –** Construir uma reta e assinalar os pontos A e B (vértices do triângulo).
	**Seletor –** Definir um seletor $\boldsymbol{\alpha}$ que será o indicador da medida da amplitude do ângulo interno CBA do triângulo, em que $1° \leq \alpha \leq 89°$ e com incremento $1°$, por exemplo.
	**Ângulo com uma dada amplitude –** Selecionar o ponto A, depois o ponto B (vértice do triângulo) e, de seguida, a amplitude do ângulo, neste caso α.
	**Ângulo –** Assinalar o ângulo interno B (que será comum aos três triângulos) e o ângulo reto.
	**Reta Perpendicular –** Construir uma reta perpendicular à reta AB e que passe em A.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar o ponto C, pontos de interseção da reta AB com a reta AC.
	**Polígono –** Definir o triângulo retângulo $[ABC]$.
	**Distância ou Comprimento –** Medir os comprimentos dos lados do triângulo.

Construção do triângulo $[DBE]$, retângulo no vértice D:

	**Reta Perpendicular –** Construir uma reta perpendicular ao segmento de reta $[AB]$.
	**Interseção de dois objetos –** Assinalar os pontos D e E, pontos de interseção do segmento de reta com os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente.
	**Polígono –** Definir o triângulo retângulo $[DBE]$.
	**Ângulo –** Assinalar o ângulo reto em D.
	**Distância ou Comprimento –** Medir os comprimentos dos lados do triângulo.

Construção do triângulo $[FBG]$, retângulo no vértice F:

Proceder do mesmo modo que foi utilizado na construção do triângulo $[DBE]$.

4.2.4. Tarefa Papiro de Rhind

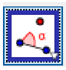
Esta tarefa tem como objetivo visualizar vários quadriláteros convexos, nomeadamente os paralelogramos, calcular a medida da sua área utilizando as fórmulas convencionais e a fórmula utilizada pelos geómetras egípcios, comparando-as. (Tarefa Papiro de Rhind)

O porquê de algumas questões!

Questão	Objetivo
1. a. e b.	Utilizando os seletores, visualizar o paralelogramo pretendido (o que implica que os alunos conheçam as propriedades dos paralelogramos), fazer a sua representação geométrica e calcular a medida da sua área aplicando as fórmulas referidas. No final, comparar, em cada paralelogramo considerado, os valores obtidos.
2.	Após comparar os valores anteriores, pretende-se que, mediante os dados disponíveis, identificar possíveis elementos geométricos que não foram considerados pelos geómetras egípcios quando aplicavam a sua fórmula para o cálculo de áreas de quadriláteros convexos.
6.	Pretende-se que os alunos verifiquem para que ângulo o **Erro cometido** (valor absoluto da diferença entre as duas áreas para o mesmo paralelogramo) é mínimo (zero) e é máximo, relacionando o Erro cometido com a medida da amplitude do ângulo.
7.	Uma vez que os valores, para o mesmo paralelogramo, nem sempre são iguais, pretende-se que os alunos indiquem o que poderia ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos egípcios para esta ser válida para qualquer paralelogramo. No caso do 9.º ano, os alunos são direcionados para a determinação da fórmula aplicando os seus conhecimentos sobre as razões trigonométricas.
8.	Pretende-se mostrar em que casos a fórmula, utilizada pelos geómetras egípcios, se verifica, levando os alunos a concluir que é apenas nos retângulos. Os alunos trabalham algebricamente a expressão apresentada.

9.	Pretende-se mostrar que a fórmula utilizada pelos geómetras egípcios é válida para todos os paralelogramos apenas se $A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. Os alunos trabalham algebricamente a desigualdade apresentada.
10.	É objetivo que os alunos assumam o papel de geómetra egípcio e tentem chegar à fórmula apresentada por eles. Assim, é apresentada uma possível sugestão para chegar a essa fórmula. Os alunos trabalham algebricamente as expressões apresentadas.
A última questão é aberta à imaginação dos alunos, procurando que reflitam um pouco sobre a importância das referências históricas matemáticas para o conhecimento que hoje possuímos.	

Na conceção deste *applet* foram utilizados os seguintes comandos:

Comando	**Nome – Propósito da sua utilização**
	**Mostrar/esconder objeto –** Esconder construções auxiliares cuja observação não seja necessária para a visualização final.
Construção do paralelogramo $[ABCD]$ em que as medidas dos comprimentos dos lados $[AB]$ e $[AD]$ bem como a medida da amplitude do ângulo interno BAD podem ser alterados consoante o paralelogramo pretendido:	
	**Seletor –** Definir três seletores: $\boldsymbol{AB}$ (será a medida do comprimento da base do quadrilátero); $\boldsymbol{AD}$ (será a medida do comprimento do lado do quadrilátero) e $\boldsymbol{\alpha}$ (será a medida da amplitude do ângulo BAD).
	**Segmento de Reta –** Definir o segmento de reta $[AB]$ com um determinado comprimento (que neste caso será o seletor AB).
	**Ângulo com uma dada amplitude –** Selecionar o ponto B, depois o ponto A e, de seguida, a amplitude do ângulo, que neste caso é α.
	**Ponto D' –** Designar o ponto obtido por D'.
	**Ângulo –** Assinalar o ângulo BAD'.
	**Reta (dois pontos) –** Construir a reta AD'.

	Circunferência de centro A e raio *AD* – Construir uma circunferência de centro no ponto A e raio $\overline{AD}$ (seletor).
	Interseção de dois objetos – Assinalar o ponto D, ponto de interseção da circunferência de centro A e raio $[AD]$ com a reta AD'.
	Segmento de Reta – Definir o segmento de reta $[AD]$.
	Reta paralela – Construir duas retas paralelas: uma a $[AB]$ e que contém o ponto D e outra a $[AD]$ e que contém o ponto B.
	Interseção de dois objetos – Assinalar o ponto C, ponto de interseção das retas construída no ponto anterior.
	Polígono – Definir o quadrilátero $[ABCD]$.
	Distância ou Comprimento – Medir os comprimentos dos lados$[AB]$ e $[AD]$ do quadrilátero.
	Semirreta (dois pontos) – Construir a semirreta $\dot{A}B$.
	Ponto E – Assinalar o ponto E, exterior ao quadrilátero $[ABCD]$ e sobre a semirreta $\dot{A}B$.
	Segmento de Reta – Definir o segmento de reta $[BE]$ e formatá-lo para linha descontínua.
	Reta Perpendicular – Construir uma reta perpendicular ao segmento de reta $[BE]$ e que passe em C.
	Interseção de dois objetos – Assinalar o ponto F, ponto de interseção da reta BC e do segmento de reta $[BE]$.
	Segmento de Reta – Definir o segmento de reta $[CF]$ (altura do paralelogramo) e formatá-lo para linha descontínua.
	Ângulo – Assinalar o ângulo EFC.
	Distância ou Comprimento – Medir o comprimento do segmento de reta $[CF]$.
	Segmento de Reta – Definir as diagonais do paralelogramo e formatá-las para linha descontínua.
	Distância ou Comprimento – Medir o comprimento das diagonais do paralelogramo.

4.3. Reflexão sobre as questões das tarefas

Neste ponto será apresentada uma reflexão sobre as questões colocadas nas tarefas e, com base na mesma, alterar, se necessário, as suas formulações.

4.3.1. 7.º ano – Tarefas 1 e 2

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Alteração Proposta</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefa 1 – Critério LLL</td></tr>
<tr><td>4. d.</td><td>Embora este conteúdo já tenha sido abordado, verifico que a maioria dos alunos não o assimilou, não tendo conseguido responder corretamente à questão colocada. Assim, solicitaria o cálculo da razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEF]$ no triângulo $[ABC]$, acrescentando uma coluna à tabela dada para o devido efeito, como por exemplo:
<table>
<tr><td>Coluna F</td></tr>
<tr><td>Razão entre as medidas dos lados correspondentes</td></tr>
<tr><td>$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\quad}{\quad} =$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefa 2</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Solicitaria que visualizassem as medidas das amplitudes dos ângulos dos três triângulos e analisassem os triângulos dois a dois, concluindo quanto à semelhança de triângulos.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Pediria para justificar, na conclusão, o porquê de os triângulos considerados serem ou não semelhantes, identificando o critério de semelhança utilizado.</td></tr>
<tr><td>3. b.</td><td>Pediria aos alunos para serem eles a justificar o porquê de os triângulos considerados não serem semelhantes, identificando o critério de semelhança utilizado.</td></tr>
</table>

4.3.2. 8.º ano – Tarefas 3, 4 e 5

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Alteração Proposta</th></tr>
<tr><td>Tarefa 3</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Solicitaria aos alunos que colocassem nos triângulos apresentados as medidas das amplitudes dos ângulos internos dos triângulos que obtiveram na questão 3..</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Apresentaria a tabela da questão 10. e acrescentaria mais linhas para completarem com valores observados.
<table>
<tr><th>Área do quadrado de lado $[AC]$</th><th>Área do quadrado de lado $[AB]$</th><th>Área do quadrado de lado $[CB]$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$+ \qquad =$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$+ \qquad =$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$+ \qquad =$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$+ \qquad =$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Solicitaria que, de acordo com os dados obtidos na tabela anterior, os alunos concluíssem sobre a relação existente entre as medidas das áreas dos quadrados contruídos sobre os lados de um triângulo retângulo.</td></tr>
<tr><td>Tarefa 5</td><td></td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Procederia da mesma forma como na questão 9. da Tarefa 4.</td></tr>
<tr><td></td><td>Acrescentaria uma questão sobre as conclusões retiradas após a observação da tabela da questão 14.:</td></tr>
</table>

	O que podes concluir relativamente à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos ($[AC]$ e $[AB]$) e a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa ($[CB]$)?

4.3.3. 9.º ano – Tarefa 6

Questão	Alteração Proposta
Na minha opinião, considero que a tarefa está simples e foi facilmente concretizada. No entanto acrescentaria duas questões para serem exploradas sobre:	
11.	Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.
12.	Dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$.

4.3.4. Tarefa Papiro de Rhind

Questão	Alteração Proposta
1.	Insistiria mais no rigor da representação dos paralelogramos.
Exploraria mais a pergunta aberta (última questão), solicitando uma pesquisa na *Internet* sobre o tema e discutindo na aula seguinte.	

Capítulo 5 – Experiência em Turmas do 3.º Ciclo: Recolha, Análise e Interpretação dos Dados

5. Experiência em Turmas do 3.º Ciclo: Recolha, Análise e Interpretação dos Dados

As tarefas elaboradas para os diferentes anos de escolaridade tiveram como intuito a aprendizagem de alguns conteúdos do respetivo ano de escolaridade e a averiguação de aprendizagens antecedentes, quer do presente ano de escolaridade quer de anos anteriores, como por exemplo: simbologia e razão de semelhança, entre outros. Assim, na elaboração de cada uma das tarefas procurou-se abranger vários conteúdos já lecionados e as questões foram sendo colocadas de forma gradual para que fosse mais fácil ao aluno concluir o que se pretendia. No final de cada conteúdo, encontra-se a conclusão que, em alguns casos, os alunos devem conseguir completar.

O objetivo geral da conceção dos *applets* / aplicação da interação no *GeoGebra*, era observar e trabalhar a Matemática de uma forma mais dinâmica e lúdica, como se fosse um jogo onde vamos passando de nível (de uma questão para a seguinte) até chegar ao final (conclusão - definição), e os objetivos específicos seriam a aprendizagem dos conteúdos propostos por manipulação deste *software*. Assim, o objetivo inicial seria que os alunos conseguissem realizar algum tipo de construção (como as que foram realizadas por mim) para poderem manipular o *software* e “fazer” uma Matemática mais dinâmica e não estática. No entanto, e do que me fui apercebendo durante as aulas em que o utilizava e com base nas entrevistas realizadas após a aplicação das tarefas, a construção de *applets* pelos próprios alunos seria um processo muito moroso pelo que optei por ser eu a elaborar totalmente as construções cabendo aos alunos, por mim orientados, manipular (explorar) essas construções e tirar conclusões (investigar).

Estas tarefas foram pensadas para que os alunos as trabalhassem autonomamente sem ser necessária a intervenção do docente ou pelo menos que essa intervenção fosse a menor possível (eventualmente, ao nível da utilização do *GeoGebra*, compreensão dos enunciados das questões ou comunicação matemática).

5.1. Experiências nas Turmas do 3.º Ciclo – Parte I

A elaboração das tarefas / atividades teve como base o Programa e Metas Curriculares Matemática para o Ensino Básico, tendo entrado em vigor no ano letivo 2013 / 2014.

Importa referir o “significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («saber», «reconhecer», «identificar», «designar», «provar», «demonstrar») depende do ciclo a que se referem, encontrando-se uma descrição do que é pretendido explicitada nos parágrafos intitulados «Leitura das metas curriculares».” (*Programa e Metas Curriculares – Ensino Básico*). Assim, e para o 3.º ciclo, temos os seguintes:

Leitura das Metas Curriculares do 3.º ciclo:

«**Identificar**», «**designar**»: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

«**Reconhecer**»: Pretende-se que o aluno consiga apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve no entanto saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«**Reconhecer, dado…,**»: Pretende-se que o aluno justifique o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.

«**Saber**»: Pretende-se que o aluno conheça o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«**Provar**», «**Demonstrar**»: Pretende-se que o aluno apresente uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«**Estender**»: Este verbo é utilizado em duas situações distintas. Em alguns casos, para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida; nesse caso o aluno deve saber definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização. Noutros casos, trata-se da extensão de uma propriedade a um universo mais alargado; do ponto de vista do desempenho do aluno pode entender-se como o verbo «reconhecer» com um dos dois significados acima descritos.

«**Justificar**»: O aluno deve saber justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Programa e Metas Curriculares – Ensino Básico

5.1.1. Experiência nas Turmas do 7.º ano – Parte I

As turmas do 7.º ano encontravam-se, no momento da aplicação das tarefas, a lecionar o capítulo *Figuras Geométricas. Semelhança* e o tema “Critérios de Semelhança de Triângulos”. Assim, as planificações das atividades foram pensadas e elaboradas no sentido de ir ao encontro deste mesmo tema, desafiando-me a, gradualmente e utilizando e relacionando os conhecimentos prévios dos alunos, utilizar o *software GeoGebra* para atingir o objetivo final: a compreensão dos critérios de semelhança de triângulos.

Como mencionado anteriormente, quase todos os alunos referiram, aquando da entrevista, que nunca tinham utilizado este *software*, embora alguns deles já tivessem presenciado, pontualmente no 2.º ciclo e com mais frequência no 7.º ano, a sua aplicação. Assim, e aquando da utilização do mesmo no decorrer das tarefas, foi notória a curiosidade pela manipulação das construções apresentadas, pelo que não considerei que a utilização deste *software* tivesse sido um fator de distração dos alunos, mas pelo contrário, um fator de descoberta, de conhecimento do mesmo.

5.1.1.1. "Critérios de Semelhança de Triângulos"

Aplicação da tarefa:

Este tema foi dividido em duas tarefas, as quais foram aplicadas na mesma aula (90 minutos).

Organização dos alunos:

Para a realização destas tarefas, e dado o número de computadores disponíveis, os alunos organizaram-se em grupos de dois por computador.

Enunciado das tarefas:

Foi entregue a cada aluno uma Ficha de Trabalho – Parte I (Anexo D – Ficha de Trabalho 7.º ano) com orientações para o desenvolvimento das tarefas, quer ao nível da utilização do *software GeoGebra* quer das observações e conclusões a registar em cada uma.

Recursos utilizados:

- Computadores (1 por cada 2 alunos e 1 para o professor);
- *Software GeoGebra* (previamente instalado em cada computador);
- Tarefas 1 e 2 construídas no *GeoGebra*;
- Projetor;
- Ficha de trabalho;
- Material de escrita.

Conhecimentos prévios necessários:

Neste capítulo deu-se continuidade a conhecimentos já lecionados no 2.º ciclo, tais como:

- reconhecer propriedades envolvendo ângulos, paralelismo e perpendicularidade;
- reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos;
- calcular medidas de áreas de figuras planas.

Assim, e de acordo com o documento orientador *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos*, a revisão desses conhecimentos incidiu no âmbito dos domínios:

Geometria e Medida (GM5):

- **Propriedades geométricas**

  Triângulos e quadriláteros

  - Ângulos de um triângulo: soma dos ângulos internos, (…);
  - Triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos; (…);
  - Ângulos internos de triângulos obtusângulos e retângulos;
  - Critérios de igualdade de triângulos: critérios *LLL*, *LAL* e *ALA*; construção de triângulos dados os comprimentos de lados e/ou as amplitudes de ângulos internos;
  - Relações entre lados e ângulos num triângulo ou em triângulos iguais.

Geometria e Medida (GM7):

- **Paralelismo, congruência e semelhança**
  - Isometrias e semelhanças;
  - Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e diagonais;
  - Teorema de Tales.

Na aula anterior à aplicação das tarefas 1 e 2, foram realizadas atividades de diagnóstico e de revisão com o objetivo de:

- identificar problemas de aprendizagem;
- rever conteúdos essenciais às novas aprendizagens;
- aferir o domínio de pré-requisitos essenciais à aprendizagem de conteúdos a lecionar no capítulo;
- promover intervenções pedagógicas de modo a auxiliar o aluno a superar as dificuldades diagnosticadas.

Conteúdos a abordar:

Geometria e Medida (GM7):

- Critérios de semelhança de triângulos: critérios *LLL*, *LAL* e *AA*;
- Igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes.

Capacidades Transversais:

- Resolução de problemas;
- Raciocínio Matemático;
- Comunicação Matemática.

Objetivos das Capacidades Transversais:

- Exprimir ideias, processos e resultados matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprio;
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos;
- Formular e testar conjeturas;
- Usar raciocínio indutivo;
- Interpretar informação, ideias e contextos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
- Representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema;
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas;
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.

Objetivos Gerais das Tarefas / Atividades:

- Explorar e investigar situações geométricas;
- Explorar conceitos e propriedades geométricas numa lógica de resolução de problemas;
- Explorar a intuição geométrica e a capacidade de visualização;
- Resolução de problemas;
- Explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema;
- Observar exemplos diversos de figuras semelhantes para procurar o que têm de comum;
- Ampliar e reduzir figuras recorrendo a AGD, nomeadamente, o *software GeoGebra*;
- Verificar, recorrendo ao *software GeoGebra*, que, ao ampliar ou reduzir uma figura, os ângulos se mantêm e os comprimentos são proporcionais;

- Ampliar conhecimentos;
- Definir novas estratégias para a resolução de problemas;
- Proporcionar aos alunos novas situações que permitam a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão de novos conceitos.

<u>*Objetivos Específicos:*</u>

- Reconhecer os critérios de semelhança de triângulos;
- Reconhecer que dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais;
- Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.

<u>*Objetivos / Metas Curriculares:*</u>

Subdomínio	Objetivo Geral	Descritores
Paralelismo, congruência e semelhança (GM7)	4. Identificar e construir figuras congruentes e semelhantes	4.8., 4.9., 4.10. e 4.11.

<u>*Descrição e implementação da tarefa:*</u>

Foram colocadas aos alunos situações concretas que permitiram recordar conceitos básicos de simbologia matemática. Os alunos registaram as suas observações / conclusões na Ficha de Trabalho para, no final, enunciarem os critérios de semelhança de triângulos. Com o *GeoGebra*, os alunos deviam manipular, experimentar e inferir conclusões, realizando os desafios apresentados pelas tarefas. Não foi interposto limite de tempo para cada tarefa, no entanto, pretendia-se que as tarefas 1 e 2 fossem realizadas durante 90 minutos.

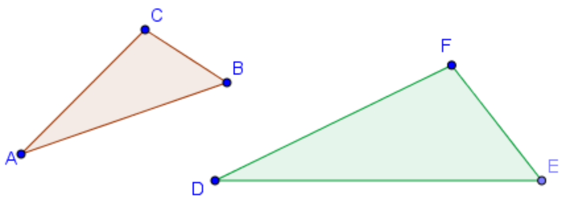
Tarefa 1 – Critério LLL e AA (<u>Tarefa 1</u> (pdf) e <u>Tarefa 1.ggb</u> (*GeoGebra*)) (Anexo D – Ficha de Trabalho 7.º ano)

Os alunos resolveram as atividades propostas na Tarefa 1 que a seguir se apresenta, a qual incluía a análise e conclusão dos critérios de semelhança Lado – Lado – Lado (LLL) e Ângulo – Ângulo (AA).

- **Critério LLL**

Acede ao ficheiro Tarefa 1.ggb e abre-o.

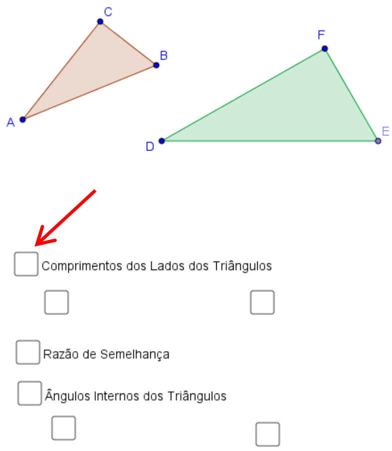
Considera os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.



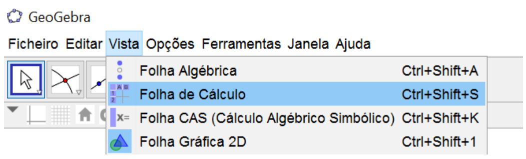
1. Estabelece uma correspondência entre os lados dos dois triângulos.

Triângulo $[ABC]$		**Triângulo** $[DEF]$
$[AB]$	$\rightarrow$	$[DE]$
	$\rightarrow$	
	$\rightarrow$	

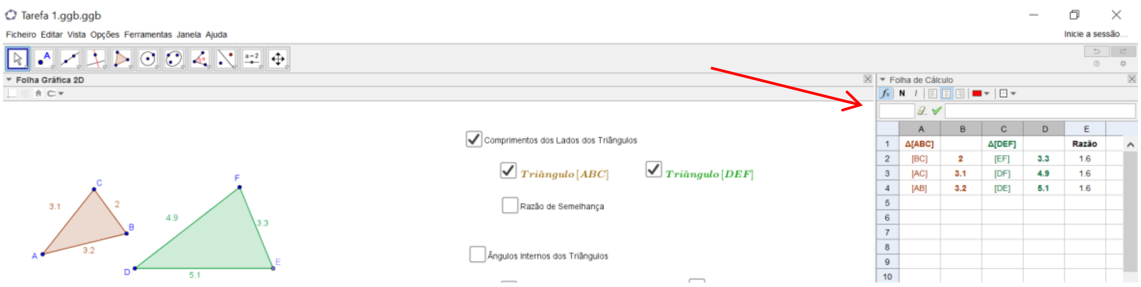
2. Vamos analisar os comprimentos dos lados dos dois triângulos.
   Com o cursor, clica na opção ***Comprimentos dos Lados dos Triângulos*** que aparece na folha gráfica.
   Surgem duas opções: *Triângulo* $[ABC]$ e *Triângulo* $[DEF]$.
   Clica nos dois quadrados e observa as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos.



3. Abre uma folha de cálculo: **Vista** → **Folha de Cálculo**.



Aparece uma **Folha de Cálculo** do lado direito do ecrã.



Repara que algumas células da Folha de Cálculo estão preenchidas:

- **Coluna A:** Lados e ângulos internos do triângulo $[ABC]$;

- **Coluna B:** Medidas dos comprimentos dos lados e amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$;
- **Coluna C:** Lados e ângulos internos do triângulo $[DEF]$ correspondentes aos do triângulo $[ABC]$;
- **Coluna D:** Medidas dos comprimentos dos lados e amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[DEF]$;
- **Coluna E:** Razão entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes;
- Podes observar também a amplitude dos ângulos internos dos dois triângulos.

Se movimentares algum dos pontos do triângulo $[ABC]$, os valores da tabela alteram-se automaticamente.

4. Considera que o triângulo $[ABC]$ é transformado no triângulo $[DEF]$. Regista os valores obtidos na tabela seguinte:

Coluna A	Coluna B		Coluna C	Coluna D	Coluna E
Triângulo $[ABC]$			**Triângulo** $[DEF]$		**Razão entre as medidas dos lados correspondentes**
$[BC]$	$\overline{BC} =$	$\rightarrow$			$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \_\_\_\_ =$
$[AC]$	$\overline{AC} =$	$\rightarrow$			
$[AB]$	$\overline{AB} =$	$\rightarrow$			

a. O que observas relativamente aos valores obtidos na **Coluna E**? ________________

b. O que representa o valor obtido na **Coluna E**? ________________________________.
Neste caso, $r =$ ______.

c. Os dois triângulos são semelhantes? ____

Justifica. ____

d. Qual a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEF]$ no triângulo $[ABC]$? $r =$ ______

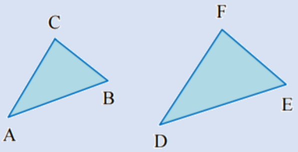
5. Com o cursor, clica na opção ***Razão de Semelhança*** que aparece na folha gráfica.
Surge o seletor $\boldsymbol{r}$. Desloca-o para os diferentes valores que ele pode assumir, e observa o que acontece ao triângulo $[DEF]$. ____________________________________

6. Fixa r em $0{,}6$. Que transformação ocorreu? ____________________________
Qual a relação entre os segmentos de reta $[EF]$ e $[BC]$? ________________________

7. Fixa r em $2{,}5$. Neste caso, o que podes concluir quanto à transformação ocorrida relativamente ao triângulo $[ABC]$? ____
Qual a relação entre os segmentos de reta $[EF]$ e $[BC]$? ________________________

8. Qual é o valor que deves fixar para r de modo que os dois triângulos sejam geometricamente iguais? $r =$ ______

<u>CONCLUSÃO:</u>

Critério de Semelhança ***LLL***	Em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente ________________, ou seja, $\frac{\Delta[DEF] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = r$ 

- **<u>Critério AA</u>**

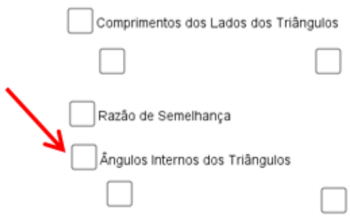
Como pudeste concluir, os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes.

Vamos agora analisar as amplitudes dos ângulos internos de dois triângulos semelhantes.

1. Com o cursor desseleciona os comprimentos dos lados dos triângulos.

2. Fixa uma razão de semelhança à tua escolha, de modo que o triângulo $[DEF]$ seja uma **<u>ampliação</u>** do triângulo $[ABC]$: $r =$ ______.

3. Para analisares as amplitudes dos ângulos internos dos dois triângulos, clica na opção ***Ângulos Internos dos Triângulos*** que aparece na folha gráfica.
Surgem duas opções: *Triângulo* $[ABC]$ e *Triângulo* $[DEF]$.
Clica nos dois quadrados e observa essas amplitudes.



4. Completa a tabela com as medidas das amplitudes dos ângulos internos dos dois triângulos:

Ampliação

	Triângulo $[ABC]$		**Triângulo** $[DEF]$
	$B\hat{A}C =$	$\rightarrow$	$E\hat{D}F =$
	$A\hat{C}B =$	$\rightarrow$	$D\hat{F}E =$
	$C\hat{B}A =$	$\rightarrow$	$F\hat{E}D =$
TOTAL			

a. Comparando os valores das duas colunas, o que observas? ________________________

b. Altera a razão de semelhança, mantendo uma ampliação. As amplitudes destes ângulos alteraram-se? ____

c. Completa:

Para dois triângulos serem semelhantes basta que tenham os ________________

____

5. Altera a razão de semelhança, de modo que, agora, o triângulo $[DEF]$ seja uma **<u>redução</u>** do triângulo $[ABC]$. Completa a tabela.

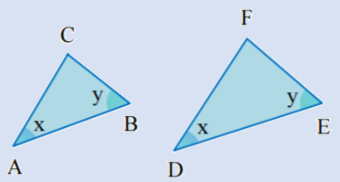
Redução

	Triângulo $[ABC]$		Triângulo $[DEF]$
	$B\hat{A}C =$	$\rightarrow$	$E\hat{D}F =$
	$A\hat{C}B =$	$\rightarrow$	$D\hat{F}E =$
	$C\hat{B}A =$	$\rightarrow$	$F\hat{E}D =$
TOTAL			

a. Comparando os valores das duas colunas, o que observas? ____________________

b. Altera a razão de semelhança, mantendo uma redução. As amplitudes destes ângulos alteraram-se? ____

<u>CONCLUSÃO:</u>

Critério de Semelhança ***AA***	Em triângulos semelhantes, os ângulos correspondentes são ________________________________. 

6. Porque será que este critério se designa apenas por ***AA*** e não por ***AAA*** ?

____

____

Esta tarefa foi realizada com o auxílio do *software GeoGebra* (Figura 5.1.). Seguem-se depois as visualizações da construção elaborada para os critérios de semelhança de triângulos LLL e AA e a análise às respostas dadas pelos alunos.

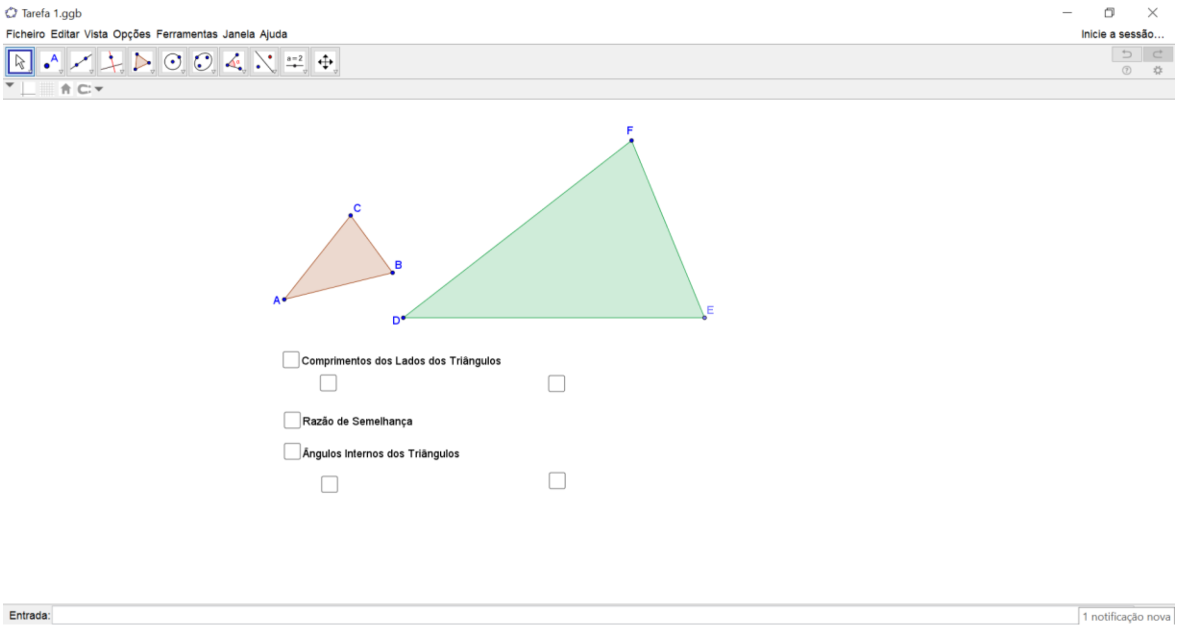


Figura 5.1.: Tarefa 1, critério LLL.

- ## CRITÉRIO LLL

Pretende-se concluir que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes utilizando apenas as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos dados. Além disso, se ocorrer uma transformação geométrica (ampliação (Figura 5.2.) ou redução (Figura 5.3.)) num dos triângulos, os lados mantêm-se diretamente proporcionais, ou seja, os triângulos dados continuam semelhantes.

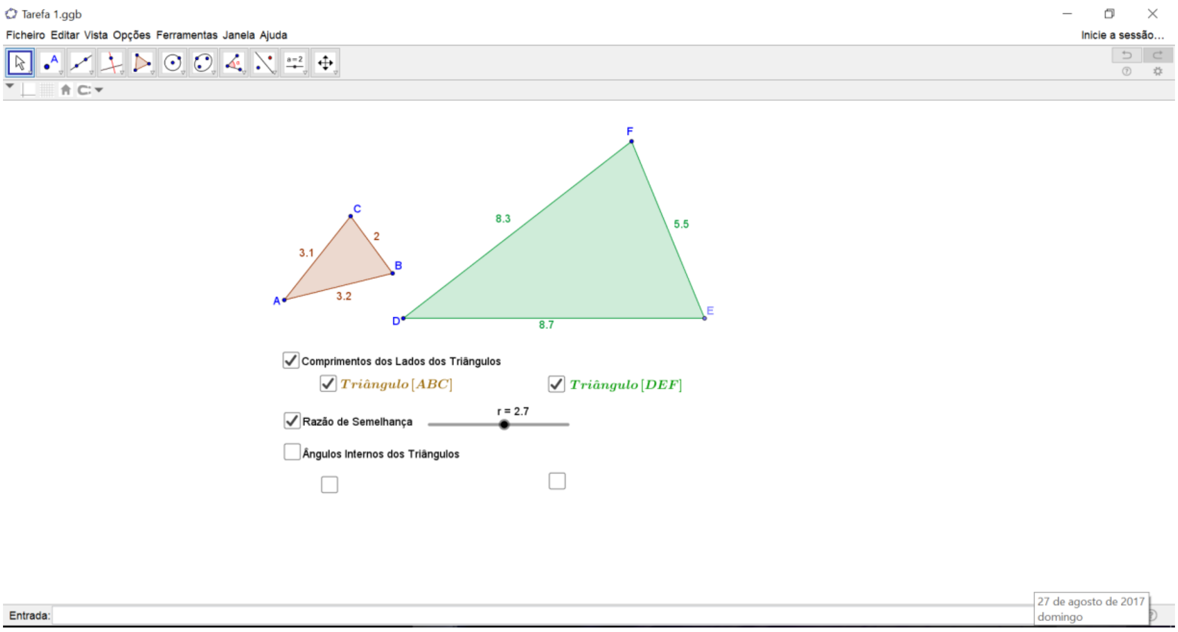


Figura 5.2.: Tarefa 1, critério LLL: no caso de a transformação geométrica ser uma ampliação.

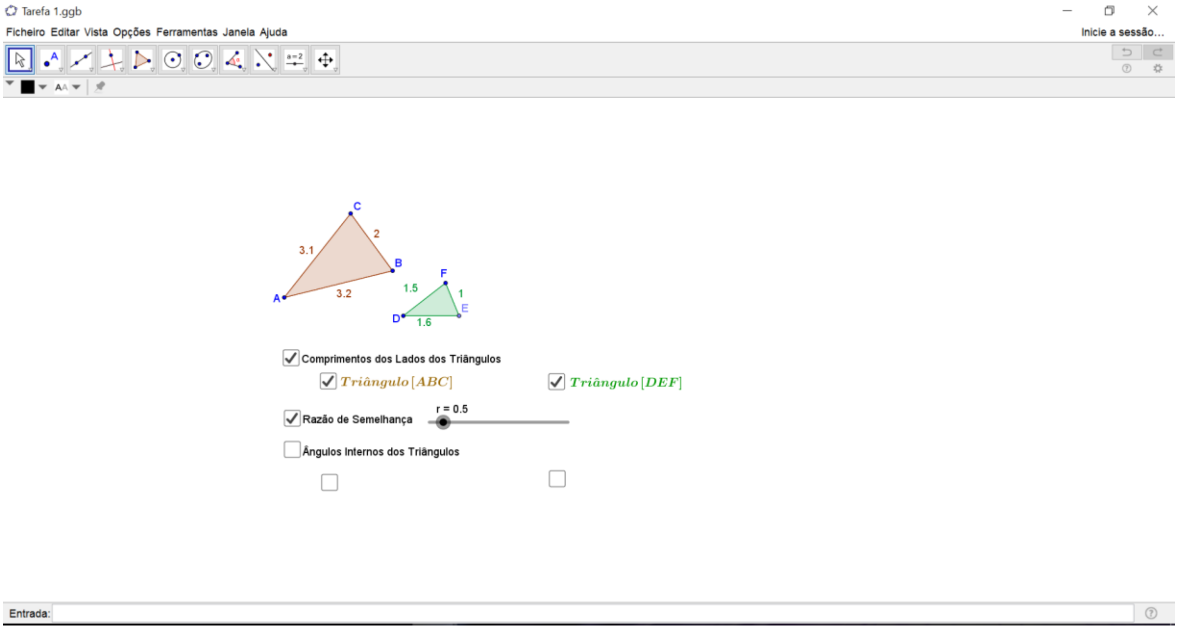


Figura 5.3.: Tarefa 1, critério LLL: no caso de a transformação geométrica ser uma redução.

Após a concretização da Tarefa 1 – Critério LLL, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	Observação
1.	É solicitado aos alunos que estabeleçam uma correspondência entre os lados dos dois triângulos. Apesar de a maioria dos alunos conseguir fazer o que se pretende (Figura 5.4.), alguns alunos não seguiram o exemplo dado, ignorando a simbologia (Figura 5.5.).

Triângulo $[ABC]$		Triângulo $[DEF]$
$[AB]$	→	$[DE]$
[BC]	→	[EF]
[CA]	→	[FD]

Figura 5.4.: Resposta do aluno E15.

Triângulo $[ABC]$		Triângulo $[DEF]$
$[AB]$	→	$[DE]$
BC	→	EF
CA	→	FD

Figura 5.5.: Resposta do aluno B15.

4. Nesta questão, os alunos não registaram todos as mesmas medidas para os comprimentos do triângulo $[DEF]$ (Figura 5.6. e 5.7.), o que se pode concluir que os alunos manipularam os vértices deste triângulo de modo a alterá-lo.

Coluna A	Coluna B		Coluna C	Coluna D	Coluna E
Triângulo $[ABC]$			Triângulo $[DEF]$		Razão entre as medidas dos lados correspondentes
$[BC]$	$\overline{BC} = 2$	→	$[EF]$	3,9	$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{3,9}{2} = 1,9$
$[AC]$	$\overline{AC} = 3,1$	→	$[DF]$	5.9	$\frac{DF}{AC} = \frac{5.9}{3,1} = 1,9$
$[AB]$	$\overline{AB} = 3,2$	→	$[DE]$	6.1	$\frac{DE}{AB} = \frac{6.1}{3,2} = 1,9$

Figura 5.6.: Resposta do aluno B13.

Coluna A	Coluna B		Coluna C	Coluna D	Coluna E
Triângulo $[ABC]$			Triângulo $[DEF]$		Razão entre as medidas dos lados correspondentes
$[BC]$	$\overline{BC} = 2$	→	$[EF]$	4,5	$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{4,5}{2} = 2,2$
$[AC]$	$\overline{AC} = 3,1$	→	$[DF]$	6,8	$\frac{\overline{DF}}{AC} = \frac{6,8}{3,1} = 2,2$
$[AB]$	$\overline{AB} = 3.2$	→	$[DE]$	7,1	$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{7,1}{3,2} = 2,2$

Figura 5.7.: Resposta do aluno E12.

4. a. A maioria dos alunos conclui que os valores obtidos eram iguais (Figura 5.8.) e alguns designaram logo a ***Razão entre as medidas dos lados correspondentes*** como sendo razão de semelhança (Figura 5.9.). Apenas um aluno referiu que esses valores eram diretamente proporcionais, o que se pode concluir que esta noção não está compreendida por este aluno (Figura 5.10.).

O que observas relativamente aos valores obtidos na Coluna E? A razão é igual.

Figura 5.8.: Resposta do aluno E15.

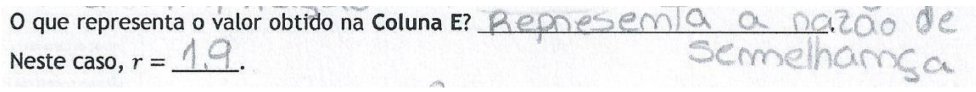
O que observas relativamente aos valores obtidos na Coluna E? A razão de semelhança é a mesma

Figura 5.9.: Resposta do aluno B7.

O que observas relativamente aos valores obtidos na Coluna E? Diretamente proporcionais

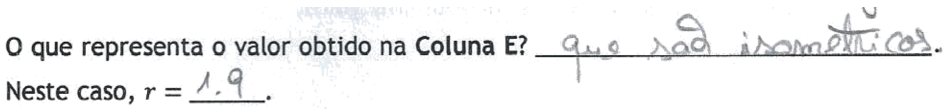
Figura 5.10.: Resposta do aluno B16.

4. b. Nesta questão, a maioria dos alunos referiu que o valor obtido representava a razão de semelhança (Figura 5.11). No entanto, um aluno respondeu que são isométricas (Figura 5.12.) o que se pode concluir que o aluno não compreendeu o conceito de figuras isométricas associado à razão de semelhança. Quando o questionei sobre o que são figuras isométricas o aluno respondeu: "são figuras que têm os lados e os ângulos internos iguais". Visualmente, o aluno reconhece duas figuras isométricas, no entanto confunde essas medidas com a razão entre os lados serem correspondentes ser igual. Repare-se que o aluno nem teve em atenção o valor da razão de semelhança.


O que representa o valor obtido na **Coluna E?** Representa a razão de semelhança

Neste caso, $r =$ 1,9.

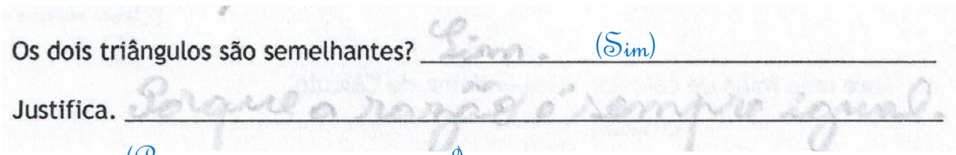
Figura 5.11.: Resposta do aluno E6.


O que representa o valor obtido na **Coluna E?** que são isométricas.

Neste caso, $r =$ 1,9.

Figura 5.12.: Resposta do aluno B8.

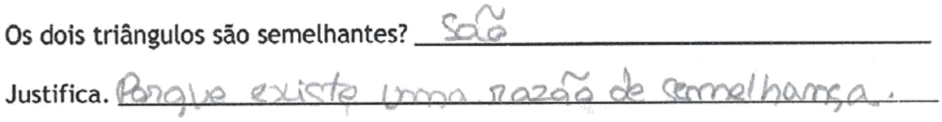
4. c. Grande parte dos alunos respondeu que os dois triângulos eram semelhantes justificando com o valor da razão (Figuras 5.13. e 5.14.) ou com o facto de as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes dos dois triângulos serem diretamente proporcionais (Figura 5.15.). Contudo, alguns alunos responderam que essa semelhança se devia ao facto de esses triângulos possuírem ângulos iguais (Figura 5.16.). De referir que em nenhuma das questões apresentadas nesta primeira tarefa é solicitado aos alunos que observem as medidas das amplitudes dos ângulos (internos ou externos) dos triângulos. Quando questionados, estes referiram que visualizaram essas medidas quando, por sua iniciativa, clicaram sobre a opção ***Ângulos Internos dos Triângulos***.


Os dois triângulos são semelhantes? Sim. (Sim)

Justifica. Porque a razão é sempre igual.

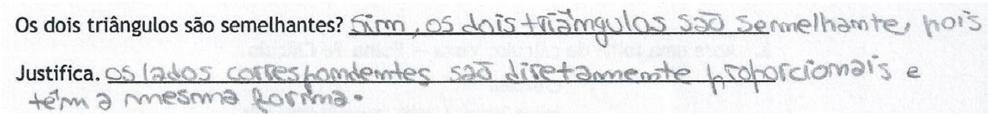
(Porque a razão é sempre igual)

Figura 5.13: Resposta do aluno E5.


Os dois triângulos são semelhantes? São

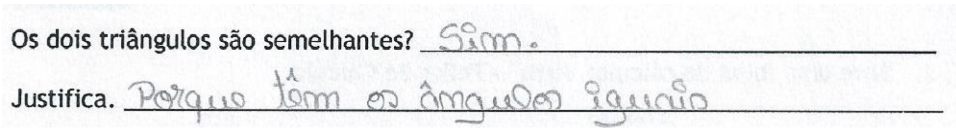
Justifica. Porque existe uma razão de semelhança.

Figura 5.14.: Resposta do aluno E11.


Os dois triângulos são semelhantes? Sim, os dois triângulos são semelhante, pois

Justifica. os lados correspondentes são diretamente proporcionais e têm a mesma forma.

Figura 5.15.: Resposta do aluno E17.


Os dois triângulos são semelhantes? Sim.

Justifica. Porque têm os ângulos iguais

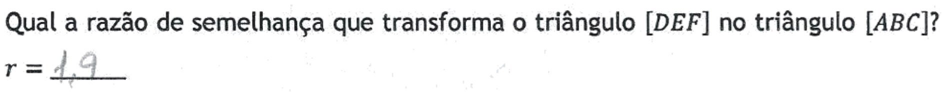
Figura 5.16.: Resposta do aluno E15.

4. d. Embora esta questão tenha sido investigada nas aulas, apenas sete alunos concluíram que a razão de semelhança solicitada era inversa da razão calculada na questão **4.** e apresentada em **4. b.** (Figura 5.17.). Quando questionados sobre as respostas erradas (Figura 5.18.), os alunos responderam que tinha sido falta de atenção da sua parte, uma vez que não consideraram qual a imagem e qual o objeto para calcular corretamente a razão de semelhança (já que não se tinham lembrado da conclusão retirada nas aulas).


Qual a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEF]$ no triângulo $[ABC]$?

$r = \frac{10}{19}$

Figura 5.17: Resposta do aluno E8.

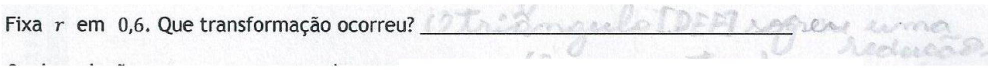

Qual a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEF]$ no triângulo $[ABC]$?

$r = 1{,}9$

Figura 5.18.: Resposta do aluno E11.

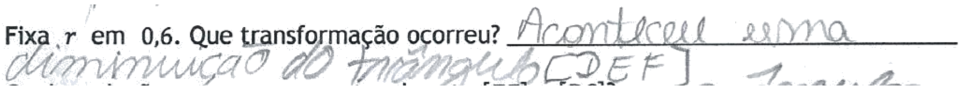
6. A maioria dos alunos utiliza corretamente a linguagem associada à semelhança de figuras e, neste caso, referiu que a transformação que tinha ocorrido era uma redução (Figura 5.19.). Outros, embora compreendam o conceito, respondem que o triângulo diminuiu (Figura 5.20.).

Na segunda questão, grande parte não respondeu, enquanto outros responderam que: “são diretamente proporcionais”, “$[EF]$ é uma redução de $[BC]$” e um aluno respondeu que “O segmento de reta $[EF]$ tem apenas 60% do comprimento do segmento de reta $[BC]$”, o que revela que este aluno compreende os conceitos de razão de semelhança / proporcionalidade direta / percentagem (Figura 5.21.).


Fixa r em 0,6. Que transformação ocorreu? O triângulo [DEF] sofreu uma redução

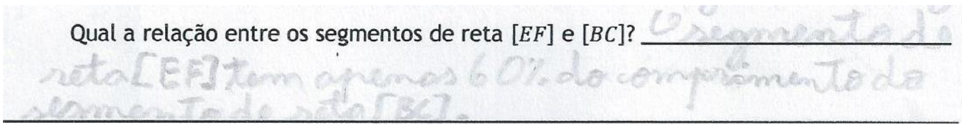
(O triângulo $[DEF]$ sofreu uma redução)

Figura 5.19.: Resposta do aluno E5.


Fixa r em 0,6. Que transformação ocorreu? Aconteceu uma diminuição do triângulo [DEF]

(Aconteceu uma diminuição do triângulo $[DEF]$)

Figura 5.20.: Resposta do aluno B13.


Qual a relação entre os segmentos de reta $[EF]$ e $[BC]$? O segmento de reta [EF] tem apenas 60% do comprimento do segmento de reta [BC].

(O segmento de reta $[EF]$ tem apenas 60% do comprimento do segmento de reta $[BC]$)

Figura 5.21: Resposta do aluno E5.

7. Os alunos responderam, na sua generalidade, que ocorreu uma ampliação ou que o triângulo aumentou (Figura 5.22.). Apenas dois alunos responderam que o triângulo não tinha sofrido alterações. Quando questionados, os alunos referiram que interpretaram que a alteração deveria ser observada no triângulo $[ABC]$ e não no triângulo $[DEF]$ (Figura 5.23.).

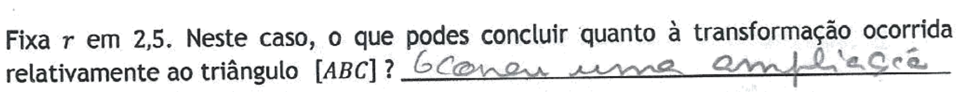
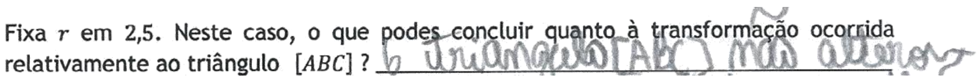

Fixa r em 2,5. Neste caso, o que podes concluir quanto à transformação ocorrida relativamente ao triângulo $[ABC]$? Ocorreu uma ampliação

Figura 5.22.: Resposta do aluno B16.


Fixa r em 2,5. Neste caso, o que podes concluir quanto à transformação ocorrida relativamente ao triângulo $[ABC]$? O triângulo [ABC] não alterou

(O triângulo $[ABC]$ não alterou)

Figura 5.23.: Resposta do aluno E16.

8. Nesta questão, todos os alunos responderam corretamente, mesmo o aluno referido na questão **4. b.**.

Conclusão No geral, os alunos concluem corretamente o critério de semelhança (Figura 5.24.) quando questionados oralmente. Quando têm de transcrever para o papel, apresentam várias dificuldades.

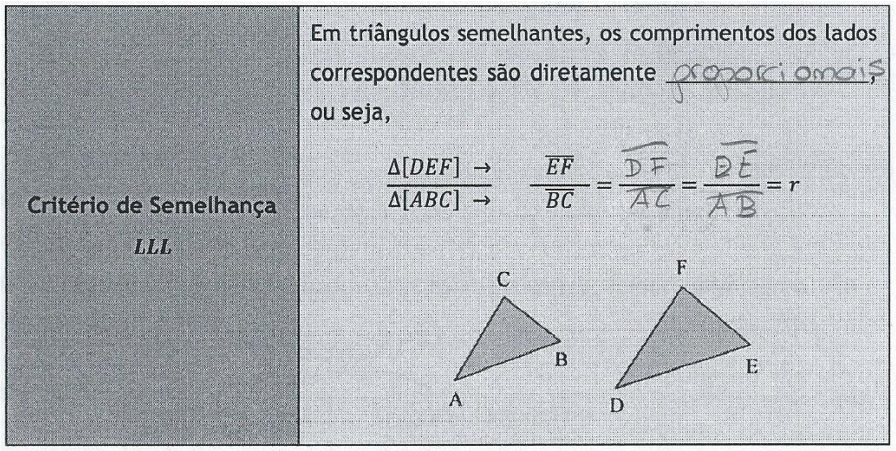


Figura 5.24.: Resposta do aluno B17.

Nesta tarefa, pode-se concluir que estes alunos apresentam algumas dificuldades, nomeadamente no que se refere a: atenção; leitura, interpretação e compreensão de enunciados; e principalmente, à proporcionalidade direta. Na minha opinião e do que pude observar, os alunos, no geral, apresentam muitas dificuldades na aquisição deste conceito.

- **CRITÉRIO AA**

No ponto anterior, provou-se que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes utilizando apenas as medidas dos comprimentos dos lados dos triângulos. Agora, e sabendo de antemão que estes dois triângulos são semelhantes, pretende-se verificar o que acontece às medidas das amplitudes dos ângulos internos dos triângulos nestes casos, considerando uma ampliação (Figura 5.25.) ou uma redução (Figura 5.26.).

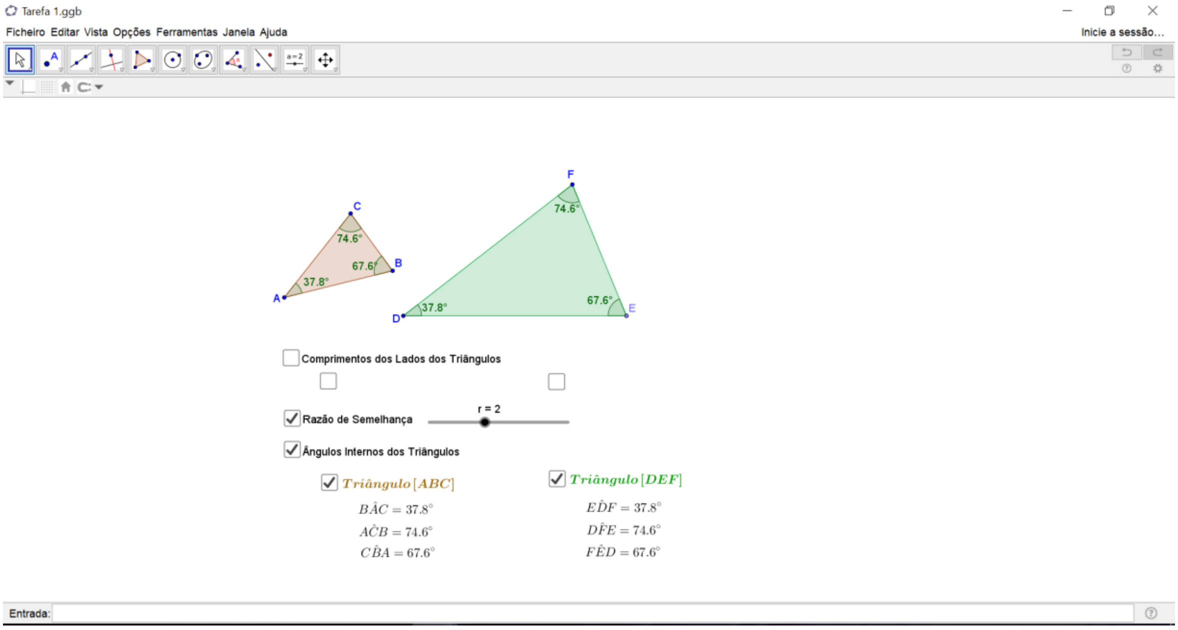


Figura 5.25.: Tarefa 1, critério AA: no caso de a transformação geométrica ser uma ampliação.

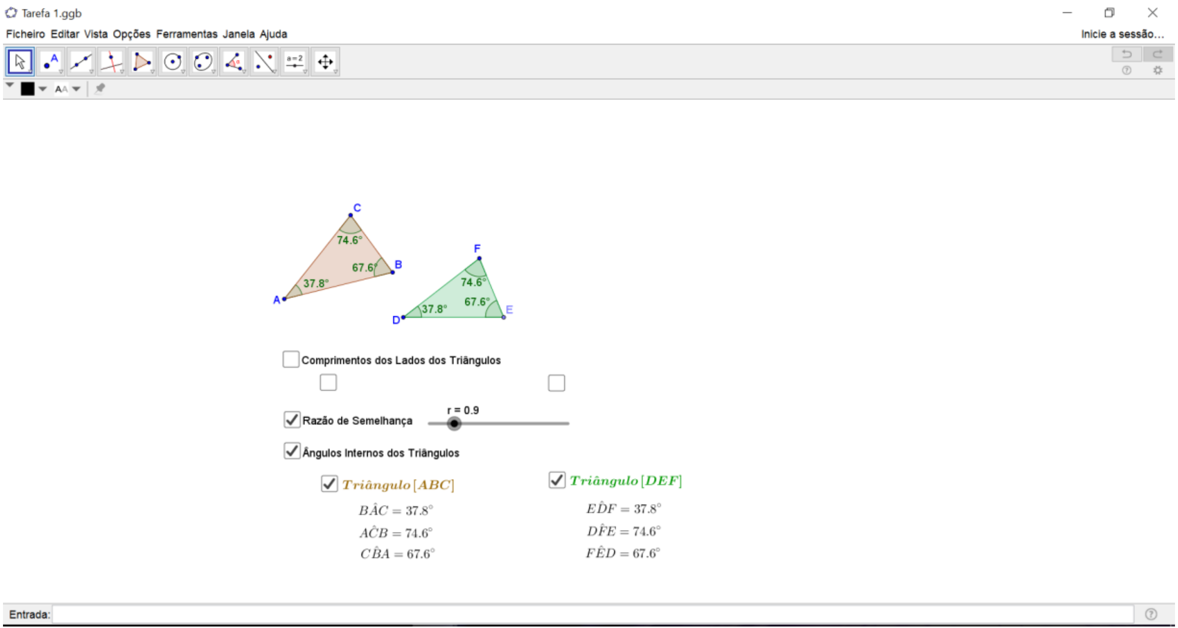


Figura 5.26.: Tarefa 1, critério AA: no caso de a transformação geométrica ser uma redução.

Após a concretização da Tarefa 1 – Critério AA, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	**Observação**
2.	Todos os alunos conseguiram indicar um valor para a razão de semelhança de modo que a transformação ocorrida fosse uma ampliação.

4. a. Os alunos concluíram que os valores das duas colunas são iguais (Figuras 5.27. e 5.28.).

Ampliação

	Triângulo $[ABC]$		Triângulo $[DEF]$
	$B\hat{A}C =$ 37,7°	→	$E\hat{D}F =$ 37,7°
	$A\hat{C}B =$ 74,5°	→	$D\hat{F}E =$ 74,5°
	$C\hat{B}A =$ 67,8°	→	$F\hat{E}D =$ 67,8°
TOTAL	180°		180°

Figura 5.27.: Resposta do aluno E6.

a. Comparando os valores das duas colunas, o que observas? Observo que a amplitude dos angulos são iguais.

(Observo que a amplitude dos ângulos são iguais)

Figura 5.28.: Resposta do aluno E6.

4. b. Nesta questão, os alunos conseguiram concluir, após manipulação, que as medidas das amplitudes dos ângulos não se alteram, caso a razão de semelhança seja alterada, de modo que se mantenha a transformação (neste caso, ampliação).

4. c. Os alunos facilmente concluíram que para dois triângulos serem semelhantes basta que tenham todos os ângulos iguais (Figura 5.29.).

Para dois triângulos serem semelhantes basta que tenham os todos os angulos iguais

Figura 5.29.: Resposta do aluno E6.

Conclusão Os alunos facilmente concluíram este critério de semelhança (Figura 5.30.).

Critério de Semelhança *AA*	Em triângulos semelhantes, os ângulos correspondentes são todos iguais.

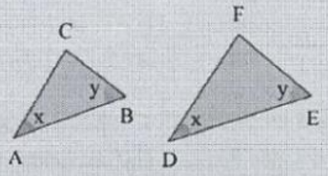
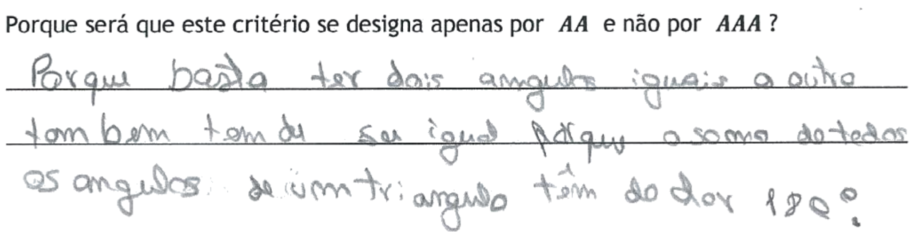


Figura 5.30.: Resposta do aluno B9.

6. Na turma 7.º B, grande parte dos alunos não foi capaz de justificar a razão deste critério se designar *AA*. Já na turma 7.º E, quase todos os alunos foram capazes de justificar a designação deste critério (Figura 5.31.).


Porque será que este critério se designa apenas por AA e não por AAA ?

Porque basta ter dois angulos iguais o outro tambem tem de ser igual porque a soma de todos os angulos de um triangulo tem de dar 180°.

Figura 5.31.: Resposta do aluno E12.

Pode-se concluir que, nesta tarefa, estes alunos não sentiram grandes dificuldades e concluíram facilmente o critério pretendido.

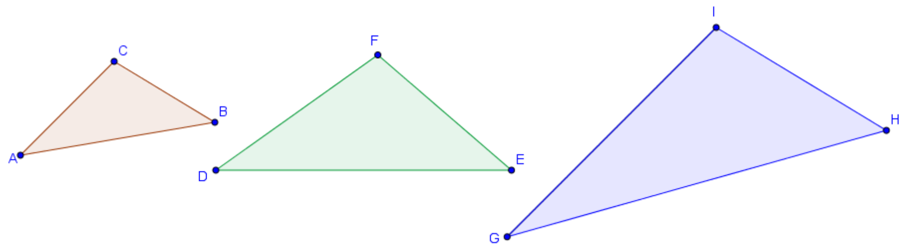
Tarefa 2 – Critério LAL (Tarefa 2 (pdf) e Tarefa 2.ggb (*GeoGebra*)) (Anexo D – Ficha de Trabalho 7.º ano)

Os alunos resolveram as atividades propostas na Tarefa 2 que a seguir se apresenta, a qual incluía a análise e conclusão do critério de semelhança Lado – ângulo – Lado (LAL).

- **Critério LAL**

Acede ao ficheiro Tarefa 2.ggb e abre-o.

Considera os triângulos $[ABC]$, $[DEF]$ e $[GHI]$.



1. Visualiza a amplitude dos seguintes ângulos internos dos triângulos dados clicando em ***Amplitude dos Ângulos Correspondentes*** que se encontra na folha gráfica:

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[DEF]$	**Triângulo** $[GHI]$
$A\hat{C}B =$	$D\hat{F}E =$	$G\hat{I}H =$

2. Visualiza o comprimento dos seguintes lados dos triângulos clicando em ***Comprimento dos Lados Correspondentes*** que se encontra na folha gráfica:

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[DEF]$	**Triângulo** $[GHI]$
$\overline{AC} =$	$\overline{DF} =$	$\overline{GI} =$
$\overline{CB} =$	$\overline{FE} =$	$\overline{IH} =$
$\overline{AB} =$		$\overline{GH} =$

3. Completa a tabela seguinte, apresentado as razões entre os comprimentos dos lados na forma de fração irredutível.

	Triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$	**Triângulos** $[ABC]$ e $[GHI]$
	$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{}{}$	$\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{}{}$
	$\frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{}{}$	$\frac{\overline{IH}}{\overline{CB}} = \frac{}{}$
	$A\hat{C}B =$	$A\hat{C}B =$
	$D\hat{F}E =$	$G\hat{I}H =$
CONCLUSÃO (quanto à semelhança)		

Repara que o ângulo igual está entre os dois lados em que os comprimentos são diretamente proporcionais.

a. Vamos continuar a analisar os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$.

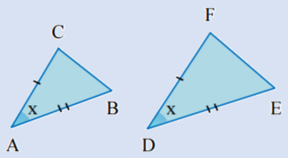
Calcula a razão entre: $\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{}{} =$ $\qquad$ $\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{}{} =$

Indica a amplitude dos ângulos: $H\hat{G}I =$ $\qquad$ $B\hat{A}C =$

b. Os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ têm **<u>dois lados</u>** ______________________________ mas o **<u>ângulo</u>** formado por esses dois lados ______________________________.

Logo, os triângulos ____.

<u>CONCLUSÃO:</u>

Critério de Semelhança ***LAL***	Dois triângulos são semelhantes se ____________________ ____ ____. 

A resolução da tarefa teve o auxílio do *software GeoGebra* (Figura 5.32.). Segue-se depois a visualização da construção elaborada para o critério de semelhança de triângulos LAL e a análise às respostas dadas pelos alunos.

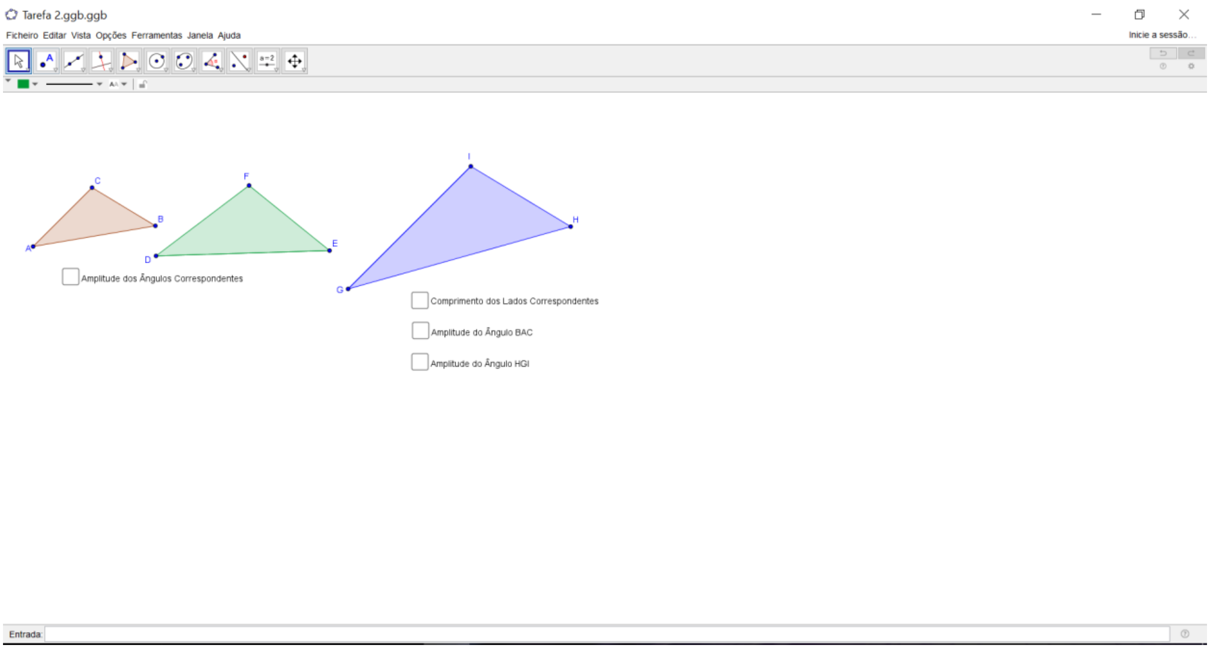


Figura 5.32.: Tarefa 2, critério LAL.

Aos triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$, utilizados na **Tarefa 1**, que tal como vimos são semelhantes, acrescentou-se um outro triângulo $[GHI]$. Pretende-se provar que existe um outro critério que prova que os dois triângulos inicialmente dados, e os quais já sabemos que são semelhantes pelos critérios LLL e AA, também o são se considerarmos as medidas dos comprimentos de dois lados e a medida da amplitude do ângulo formado por esses dois lados (critério LAL) (Figura 5.33.). Pretende-se também provar que, embora dois triângulos tenham dois lados correspondentes diretamente proporcionais e um ângulo geometricamente igual, os dois triângulos apenas são semelhantes se esse ângulo é o correspondente nos dois triângulos. Assim, os três triângulos dados têm um ângulo interno geometricamente igual e têm dois lados correspondentes diretamente proporcionais. No entanto, o triângulo $[GHI]$ não é semelhante aos triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.

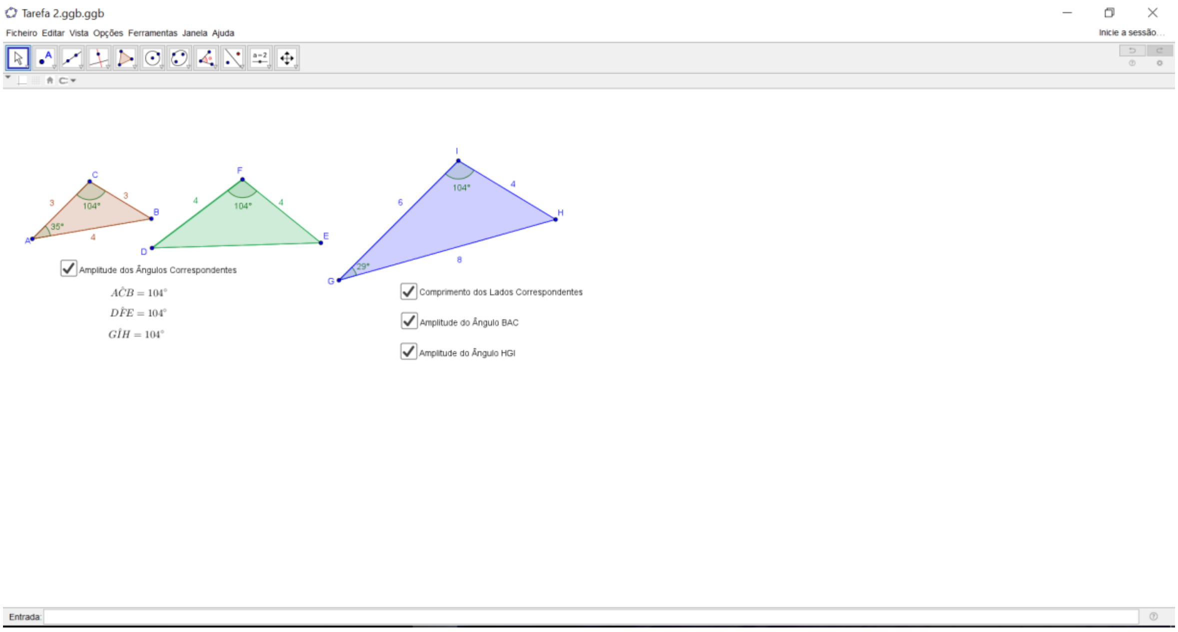


Figura 5.33.: Tarefa 2, critério LAL.

Após a concretização da Tarefa 2 – Critério LAL, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	**Observação**
1.	Todos os alunos visualizaram os mesmos triângulos, ou seja, triângulos cujas medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos correspondentes eram iguais, isto porque não manipularam os vértices (embora não fosse pedido para o fazerem). No entanto, o facto de não o ter pedido deveu-se a querer verificar se os alunos eram capazes de o fazer autonomamente.
3.	Os alunos concluíram facilmente que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ eram semelhantes e que os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ não o eram (Figura 5.34.).

	Triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$	Triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$
	$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{6}{3}$
	$\frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\overline{IH}}{\overline{CB}} = \frac{4}{3}$
	$A\hat{C}B = 104°$	$A\hat{C}B = 104°$
	$D\hat{F}E = 104°$	$G\hat{I}H = 104°$
CONCLUSÃO (quanto à semelhança)	São semelhantes	Não São semelhantes

Figura 5.34.: Resposta do aluno E11.

3. a.
3. b. A maioria dos alunos conseguiu verificar que os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ têm dois lados diretamente proporcionais mas o ângulo formado pelos dois lados não é igual, logo, os triângulos dados não são semelhantes (Figuras 5.35. e 5.36.).

a. Vamos continuar a analisar os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$.

Calcula a razão entre: $\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{8}{4} = 2$ $\qquad$ $\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{6}{3} = 2$

Indica a amplitude dos ângulos: $H\hat{G}I = 29°$ $\qquad$ $B\hat{A}C = 35°$

Figura 5.35.: Resposta do aluno E11.

Os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ têm **dois lados** diretamente proporcionais

mas o **ângulo** formado por esses dois lados é diferente.

Logo, os triângulos não são semelhantes.

Figura 5.36.: Resposta do aluno E11.

Conclusão A maioria dos alunos concluiu o critério pretendido, no entanto, a transcrição para o papel nem sempre é conseguida, principalmente na turma 7.º B. nota-se que os alunos desta turma apresentam muitas dificuldades ao nível da comunicação matemática (Figura 5.37.).

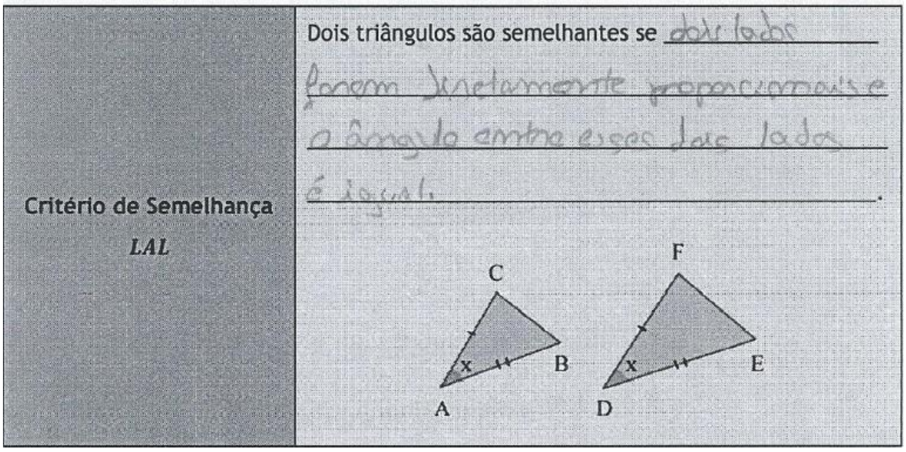


Figura 5.37.: Resposta do aluno E11.

Nesta tarefa verifica-se que os alunos apresentam grandes dificuldades no que respeito à comunicação matemática, não sendo capazes de transcrever as suas conclusões corretamente.

5.1.2. Experiência na Turma do 8.º ano

A turma do 8.º ano encontrava-se, no momento da aplicação das tarefas, a iniciar o capítulo Teorema de Pitágoras. Os temas a abordar nestas tarefas foram: “Decomposição de um triângulo retângulo pela altura refente à hipotenusa”, “Teorema de Pitágoras”, “Teorema de Pitágoras e áreas de figuras planas”. Assim, e tal como aconteceu com as turmas do 7.º ano, as planificações das atividades foram pensadas e elaboradas no sentido de ir ao encontro destes temas, desafiando-me a, gradualmente, e utilizando e relacionando os conhecimentos prévios dos alunos, utilizar o *software GeoGebra* para atingir os objetivo propostos: saber decompor um triângulo pela altura relativa à hipotenusa e reconhecer que os três triângulos obtidos são semelhantes entre si; deduzir o teorema de Pitágoras aplicando o objetivo anterior e relacionar o teorema de Pitágoras com áreas de figuras planas (quadrados, triângulos equiláteros e semicírculos.

Quase todos os alunos referiram, aquando da entrevista, que nunca tinham utilizado este *software*, embora alguns deles já tivessem presenciado, pontualmente no 2.º ciclo e no 7.º ano, mas com maior frequência este ano letivo, a sua aplicação. Assim, e tal como aconteceu nas turmas do 7.º ano, aquando da utilização do *GeoGebra* no decorrer das tarefas, foi notória a curiosidade pela manipulação das construções apresentadas, pelo que também não considerei que a utilização deste *software* tivesse sido um fator de distração dos alunos, mas pelo contrário, um fator de descoberta, de conhecimento do mesmo.

5.1.2.1. "Teorema de Pitágoras"

Aplicação da tarefa:

Este tema foi dividido em três tarefas, as quais foram aplicadas na mesma aula (90 minutos).

Organização dos alunos:

Para a realização destas tarefas, e dado o número de computadores disponíveis, os alunos organizaram-se em grupos de dois por computador.

Enunciado das tarefas:

Foi entregue a cada aluno uma Ficha de Trabalho – Parte I (Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano) com orientações para o desenvolvimento das tarefas, quer ao nível da utilização do *software GeoGebra* quer das observações e conclusões a registar em cada uma.

Recursos utilizados:

- Computadores (1 por cada 2 alunos e 1 para o professor);
- Software GeoGebra (previamente instalado em cada computador);
- Tarefas 3, 4 e 5 construídas no GeoGebra;
- Projetor;
- Ficha de trabalho;
- Material de escrita.

Conhecimentos prévios necessários:

Neste capítulo deu-se continuidade a conhecimentos já lecionados o, tais como:

- reconhecer os critérios de semelhança de triângulos;
- reconhecer que dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais;
- resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.

Assim, e de acordo com o documento orientador *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos*, a revisão desses conhecimentos incidiu no âmbito dos domínios:

Geometria e Medida (GM7):

- **Paralelismo, congruência e semelhança**
  - Isometrias e semelhanças;
  - Teorema de Tales.
  - Critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL e AA); igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes.

Na aula anterior à aplicação das tarefas 3, 4 e 5, foram realizadas atividades de diagnóstico e de revisão com o objetivo de:

- identificar problemas de aprendizagem;
- rever conteúdos essenciais às novas aprendizagens;
- aferir o domínio de pré-requisitos essenciais à aprendizagem de conteúdos a lecionar no capítulo;
- promover intervenções pedagógicas de modo a auxiliar o aluno a superar as dificuldades diagnosticadas.

Conteúdos a abordar:

Geometria e Medida (GM8):

- Teorema de Pitágoras (…);
- Problemas envolvendo os teoremas de Pitágoras (…).

Capacidades Transversais:

- Resolução de problemas;
- Raciocínio Matemático;
- Comunicação Matemática.

Objetivos das Capacidades Transversais:

- Exprimir ideias, processos e resultados matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprio;
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos;
- Formular e testar conjeturas;
- Usar raciocínio indutivo;

- Interpretar informação, ideias e contextos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
- Representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema;
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas;
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.

Objetivos Gerais das Tarefas / Atividades:

- Explorar e investigar situações geométricas;
- Explorar conceitos e propriedades geométricas numa lógica de resolução de problemas;
- Explorar a intuição geométrica e a capacidade de visualização;
- Resolução de problemas;
- Explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema;
- Ampliar conhecimentos;
- Definir novas estratégias para a resolução de problemas;
- Proporcionar aos alunos novas situações que permitam a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão de novos conceitos.

Objetivos Específicos:

- Decompor um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa;
- Resolver problemas envolvendo triângulos retângulos e semelhança de triângulos;
- Demonstrar o Teorema de Pitágoras;
- Investigar as relações entre as áreas de figuras planas construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

Objetivos / Metas Curriculares:

Subdomínio	Objetivo Geral	Descritores
Teorema de Pitágoras (GM8)	1. Relacionar o teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos	1.1., 1.2. e 1.3.
	2. Resolver problemas	2.1.

Descrição e implementação da tarefa:

Foram colocadas aos alunos situações que permitiram recordar e aplicar os critérios de semelhança de triângulos. Os alunos registaram as suas observações / conclusões na Ficha de Trabalho para, no final, enunciarem o Teorema de Pitágoras. Com o *GeoGebra*, os alunos deviam manipular, experimentar e investigar sobre a decomposição de triângulos retângulos pela altura referente à hipotenusa, realizando os desafios apresentados pelas tarefas. Não foi interposto limite de tempo para cada tarefa, no entanto, pretendia-se que as tarefas 3, 4 e 5 fossem realizadas durante 90 minutos.

Tarefa 3 – "Decomposição de um Triângulo pela Altura referente à Hipotenusa" e "A Caminho do Teorema de Pitágoras" (Tarefa 3 (pdf) e Tarefa 3.ggb (*GeoGebra*))v(Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano)

Os alunos resolveram as atividades propostas na Tarefa 3 que a seguir se apresenta, a qual incluía a análise e conclusão sobre a semelhança que existe entre os três triângulos quando se decompõe um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa e a dedução do Teorema de Pitágoras.

DECOMPOSIÇÃO DE UM TRIÂNGULO PELA ALTURA REFERENTE À HIPOTENUSA

Acede ao ficheiro Tarefa 3.ggb e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em C (**Figura 1**).

1. Como se designam os lados:

   $[AB]$ → ____________________

   $[BC]$ → ____________________

   $[AC]$ → ____________________

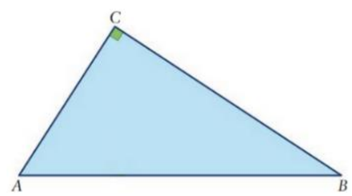


Figura 1

2. Clica sobre ***Altura do Triângulo*** $[\boldsymbol{ABC}]$ que se encontra na folha gráfica.

   O triângulo $[ABC]$ foi decomposto em dois triângulos, $[ADC]$ e $[DBC]$ (**Figura 2**).

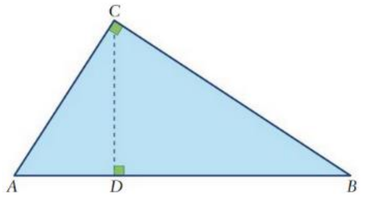


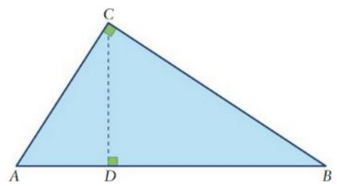
Figura 2

Indica o nome dos lados em cada um dos triângulos:

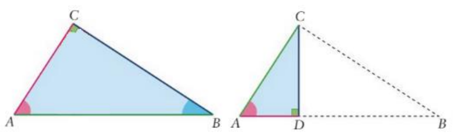
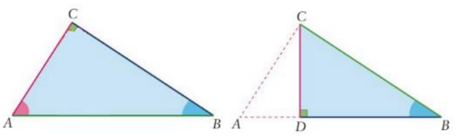
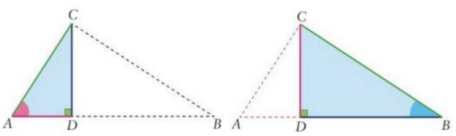
Triângulo $[ADC]$	**Triângulo** $[DBC]$
$[AD]$ $\rightarrow$ ________________________	$[DB]$ $\rightarrow$ ________________________
$[DC]$ $\rightarrow$ ________________________	$[DC]$ $\rightarrow$ ________________________
$[AC]$ $\rightarrow$ ________________________	$[BC]$ $\rightarrow$ ________________________

3. Indica a medida da amplitude dos ângulos internos de cada um dos três triângulos, clicando em ***Amplitude dos Ângulos Internos***.

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[ADC]$	**Triângulo** $[DBC]$
$A\hat{C}B =$	$C\hat{D}A =$	$B\hat{D}C =$
$B\hat{A}C =$	$D\hat{A}C =$	$D\hat{C}B =$
$C\hat{B}A =$	$A\hat{C}D =$	$C\hat{B}D =$



4. Justifica que os três triângulos ($[ABC]$, $[ADC]$ e $[DBC]$) são semelhantes, indicando o critério de semelhança (LLL, LAL ou AA) utilizado em cada caso.

PARES DE TRIÂNGULOS	**JUSTIFICAÇÃO (Critério de Semelhança)**	**RELAÇÃO ENTRE OS LADOS CORRESPONDENTES**
a. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$ 		$\frac{\Delta[ADC] \rightarrow \quad \overline{AC}}{\Delta[ABD] \rightarrow \quad \_\_\_\_} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$
b. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$ 		$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$
c. $\triangle[ADC]$ e $\triangle[DBC]$ 		$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Decomposição de um triângulo pela altura referente à Hipotenusa	Quando decompomos um triângulo retângulo pela ______________________________ obtemos dois ______________________________ entre si e ______________________________ ao triângulo inicial.

A CAMINHO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Considera novamente o triângulo $[ABC]$, retângulo em C, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, tal como mostra a **Figura 4**.

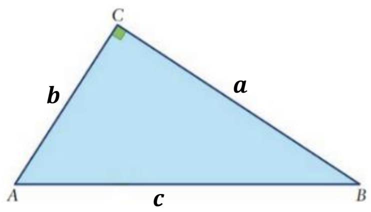


Figura 4

Sejam $[CD]$ a altura do triângulo referente à hipotenusa, $\overline{AD} = x$ e $\overline{DB} = y$ (**Figura 5**).

Logo, $x + y =$ _____

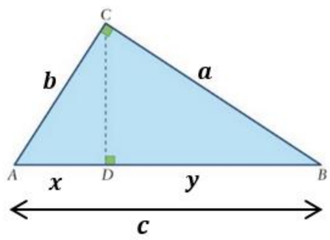


Figura 5

5. Completa as seguintes igualdades, considerando os triângulos:

A. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$

$$\frac{\Delta[ADC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \frac{\overline{AC}}{\_\_\_} = \frac{\overline{AD}}{\_\_\_}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{b}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_} \Leftrightarrow b^2 = \_\_\_$$

B. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$

$$\frac{\Delta[DBC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \frac{\_\_\_}{\overline{AB}} = \frac{\_\_\_}{\overline{BC}}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{\_\_\_}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_} \Leftrightarrow \_\_\_ = yc$$

6. Observando a **Figura 5** e tendo em atenção os resultados **A.** e **B.** obtidos na questão anterior, completa as igualdades:

$$a^2 + b^2 = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \times (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) = \_\_\_\_ \times \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

Fatorizando

Conclusão	$a^2 + b^2 = c^2$ Onde a, b e c são, respetivamente, os dois catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Esta tarefa foi realizada com o auxílio do *software GeoGebra* (Figuras 5.38. e 5.39), onde se seguem as visualizações da construção elaborada para a decomposição do triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa.

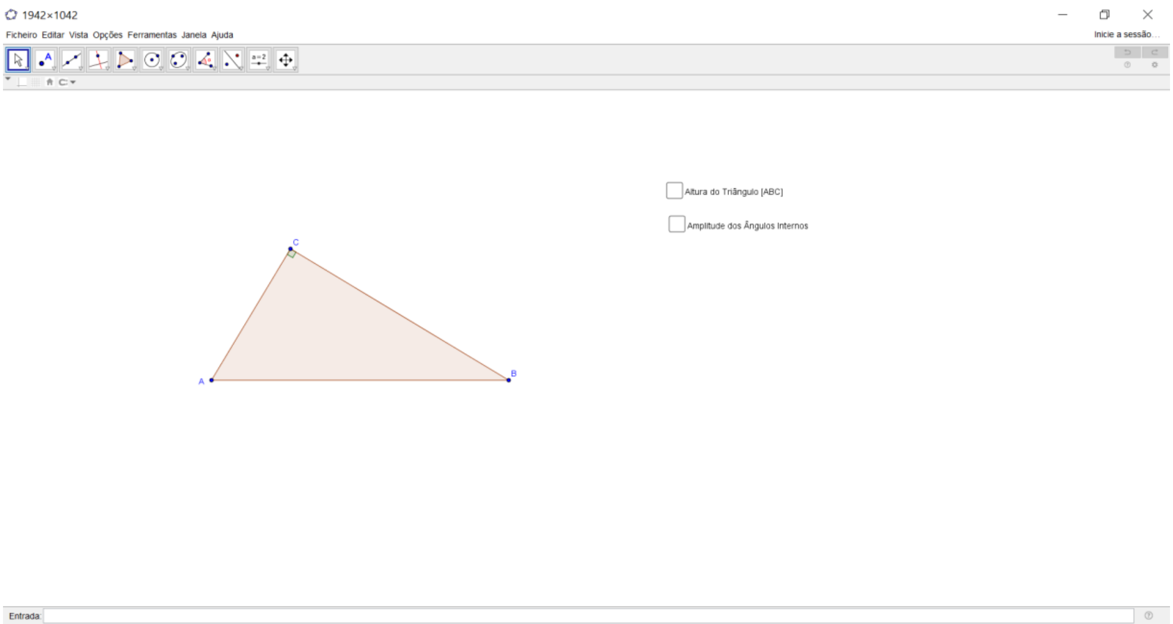


Figura 5.38.: Tarefa 3, Triângulo Retângulo dado.

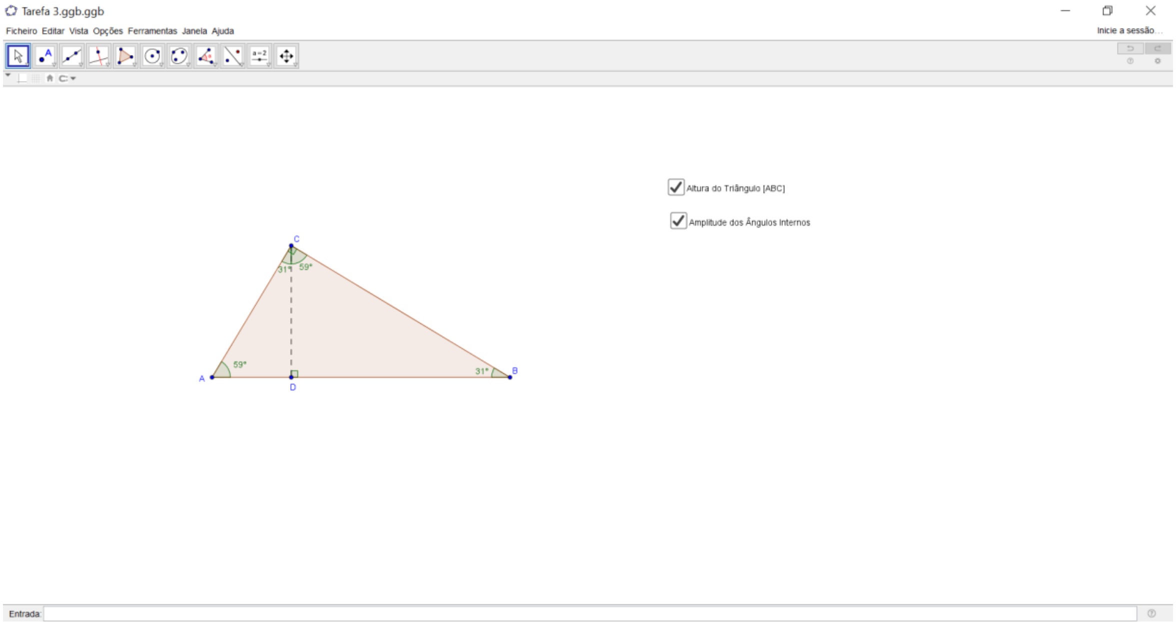


Figura 5.39.: Tarefa 3, Triângulo Retângulo decomposto pela altura referente à hipotenusa.

Após a concretização da Tarefa 3 – Decomposição de um Triângulo pela Altura referente à Hipotenusa, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	Observação
1.	Os alunos facilmente identificaram os lados do triângulo retângulo apresentado (Figura 5.40.).

$[AB] \rightarrow$ hipotenusa
$[BC] \rightarrow$ Cateto maior
$[AC] \rightarrow$ Cateto menor

Figura 5.40.: Resposta do aluno C5.

2.	Os alunos facilmente identificaram os lados dos triângulos retângulos apresentados após decomposição do triângulo original pela altura relativa à hipotenusa (Figura 5.41.).

Triângulo $[ADC]$	Triângulo $[DBC]$
$[AD] \rightarrow$ cateto menor	$[DB] \rightarrow$ cateto maior
$[DC] \rightarrow$ cateto maior	$[DC] \rightarrow$ cateto menor
$[AC] \rightarrow$ hipotenusa	$[BC] \rightarrow$ hipotenusa

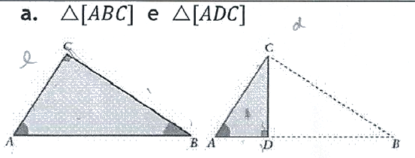
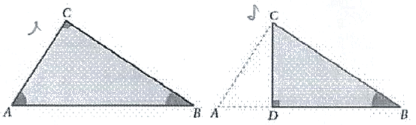
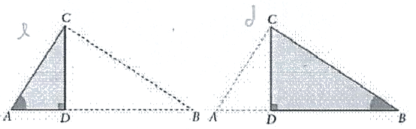
Figura 5.41.: Resposta do aluno C14.

3. Os alunos identificaram corretamente a medida da amplitude de cada um dos três triângulos. Todos os alunos utilizaram os mesmos valores, ou seja, não manipularam o triângulo original (Figura 5.42.).

Triângulo $[ABC]$	Triângulo $[ADC]$	Triângulo $[DBC]$
$A\hat{C}B =$ 90°	$C\hat{D}A =$ 90°	$B\hat{D}C =$ 90°
$B\hat{A}C =$ 59°	$D\hat{A}C =$ 59°	$D\hat{C}B =$ 59°
$C\hat{B}A =$ 31°	$A\hat{C}D =$ 31°	$C\hat{B}D =$ 31°

Figura 5.42.: Resposta do aluno C3.

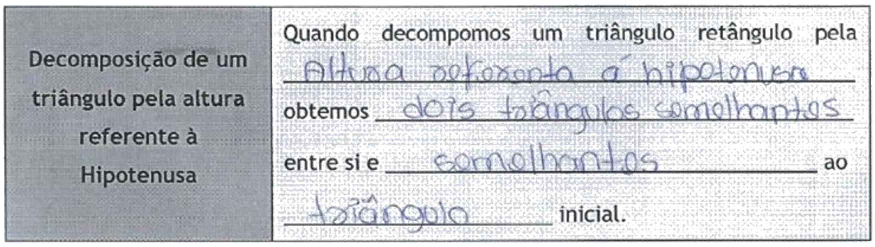
4. O sucesso desta questão, no que se refere à justificação do critério de semelhança utilizado, deveu-se ao facto de, na aula anterior terem sido revistos alguns conceitos, nomeadamente os critérios de semelhança de triângulos. Relativamente à relação entre os lados correspondentes, alguns alunos demonstraram dificuldades, embora pudessem ter recorrido à informação obtida na questão **3.** (Figura 5.43.) e utilizado, como referência, o triângulo da esquerda "e" e o da direita "d" para ser mais fácil de completar a **Relação entre os lados correspondentes**.

PARES DE TRIÂNGULOS	JUSTIFICAÇÃO	RELAÇÃO ENTRE OS LADOS CORRESPONDENTES
a. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$ 	São semelhantes pelo critério AA porque os triângulos tem dois angulos iguais	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CB}}$
b. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$ 	São semelhantes pelo critério AA porque os triangulos tem dois angulos iguais	$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$
c. $\triangle[ADC]$ e $\triangle[DBC]$ 	São semelhantes pelo critério AA porque os triangulos tem dois angulos iguais	$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}}$

(São semelhantes pelo critério AA porque os triângulos têm dois ângulos iguais)

Figura 5.43.: Resposta do aluno C20.

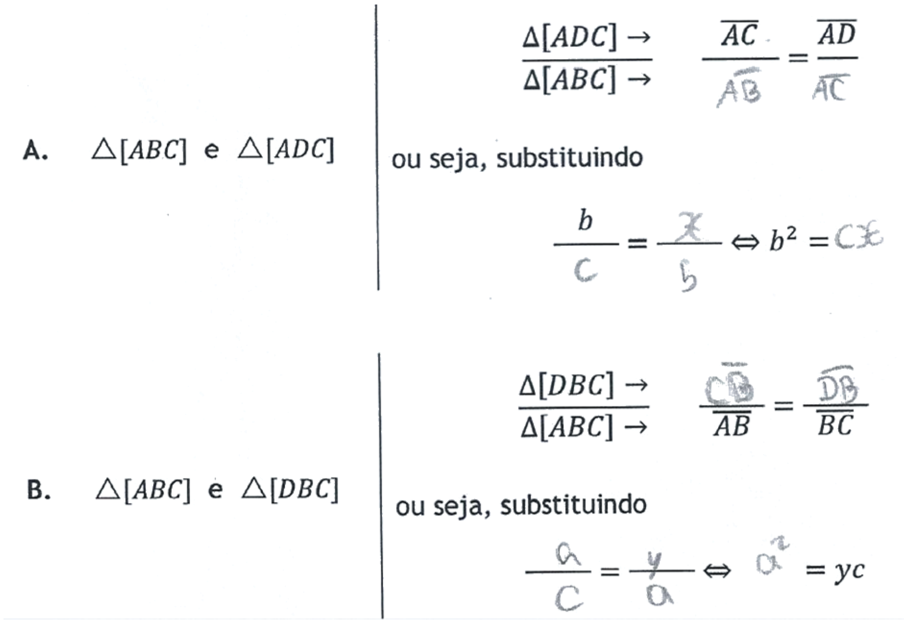
Conclusão Alguns alunos conseguiram expressar a semelhança que existe entre os três triângulos (Figura 5.44.).



Decomposição de um triângulo pela altura referente à Hipotenusa	Quando decompomos um triângulo retângulo pela altura referente á hipotenusa obtemos dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo inicial.

Figura 5.44.: Resposta do aluno C8.

5. Grande parte dos alunos conseguiu completar corretamente as igualdades utilizando linguagem simbólica (Figura 5.45.).



A. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$

$$\frac{\Delta[ADC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow b^2 = cx$$

B. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$

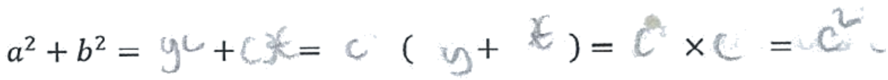
$$\frac{\Delta[DBC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{a}{c} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow a^2 = yc$$

Figura 5.45.: Resposta do aluno C14.

6. A maioria dos alunos não apresentou dificuldades em trabalhar algebricamente a expressão, conseguindo facilmente chegar à conclusão pretendida (Figura 5.46.).



$$a^2 + b^2 = yc + cx = c\ (y + x) = c \times c = c^2$$

Figura 5.46.: Resposta do aluno C14.

De referir que se observa que alguns destes alunos também apresentam dificuldades ao nível de comunicação matemática, essencialmente quando se trata de redigir conclusões / definições.

Tarefa 4 – "Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas" (Tarefa 4 (pdf) e Tarefa 4.ggb (*GeoGebra*)) (Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano)

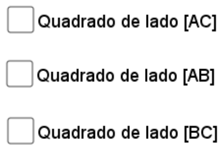
A realização da Tarefa 4, que a seguir se apresenta, teve como objetivo que os alunos tirassem conclusões relativas às áreas de figuras planas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, em concreto, do quadrado.

TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Acede ao ficheiro Tarefa 4.ggb e abre-o.

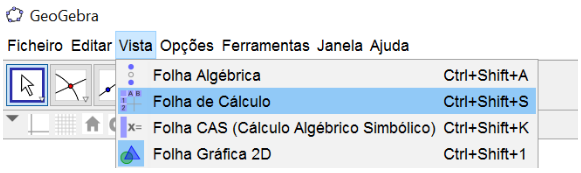
Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A.

7. Visualiza os quadrados construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado, clicando sobre ***Quadrado de lado*** $[AC]$, ***Quadrado de lado*** $[AB]$ e ***Quadrado de lado*** $[BC]$, na Folha Gráfica.



8. Visualiza a área de cada um dos quadrados, clicando sobre ***Área Azul***, ***Área Verde*** e ***Área Vermelha***, na Folha Gráfica.

9. Abre uma folha de cálculo: **Vista** → **Folha de Cálculo**.



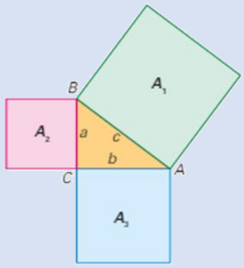
Aparece uma **Folha de Cálculo** do lado direito do ecrã, onde algumas células já se encontram preenchidas.

Movimentando um dos pontos $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$, verifica o que acontece.

____

10. Completa a tabela com um dos casos visualizados.

Área do quadrado de lado $[AC]$	Área do quadrado de lado $[AB]$	Área do quadrado de lado $[CB]$
+	=	

Conclusão	Num triângulo retângulo, a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à medida da área do quadrado contruído sobre a hipotenusa.	
		$A_1 = A_2 + A_3$

A resolução da tarefa teve o auxílio do *software GeoGebra* (Figuras 5.47. e 5.48.). Segue-se a visualização da construção elaborada para atingir o objetivo pretendido e a análise às respostas dadas pelos alunos.

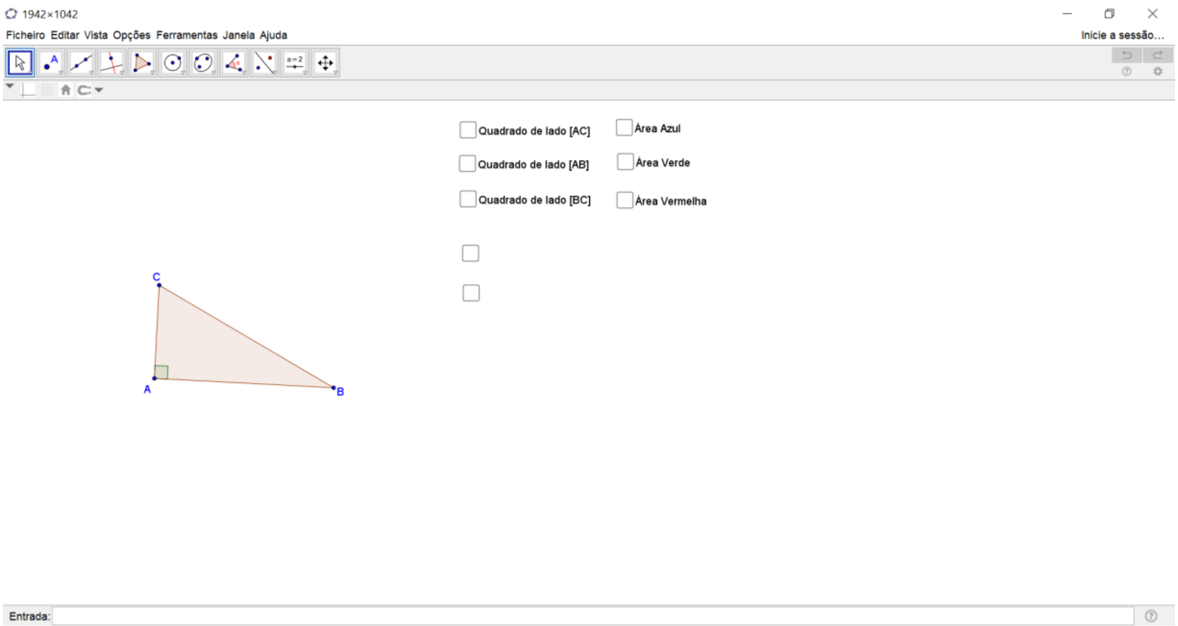


Figura 5.47.: Tarefa 4, Triângulo Retângulo.

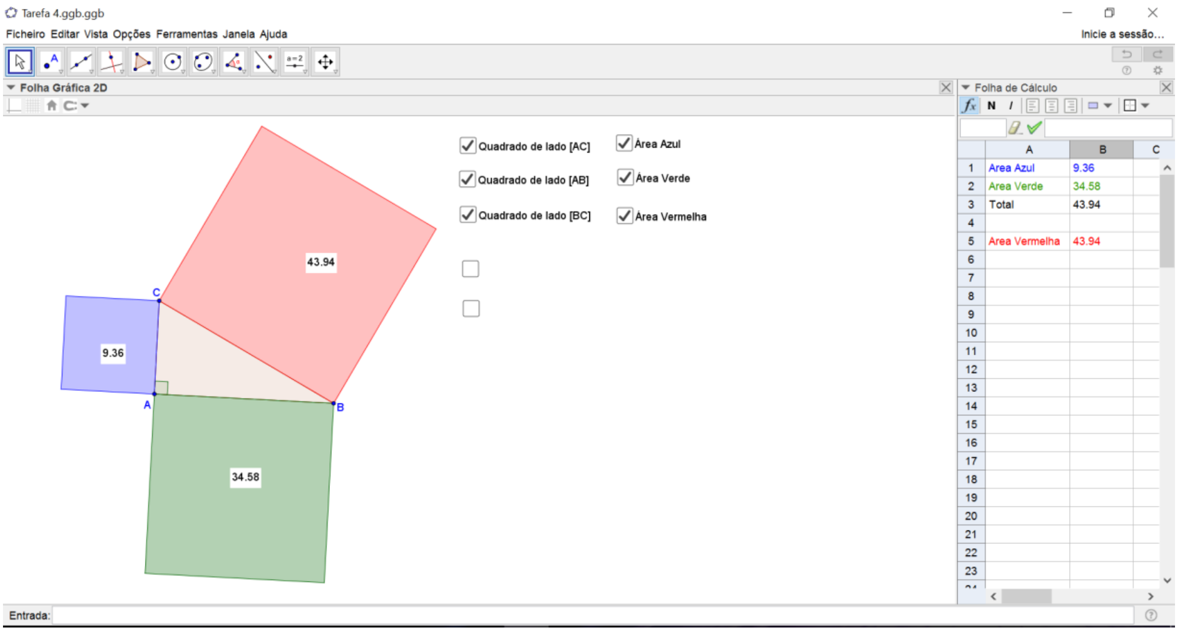


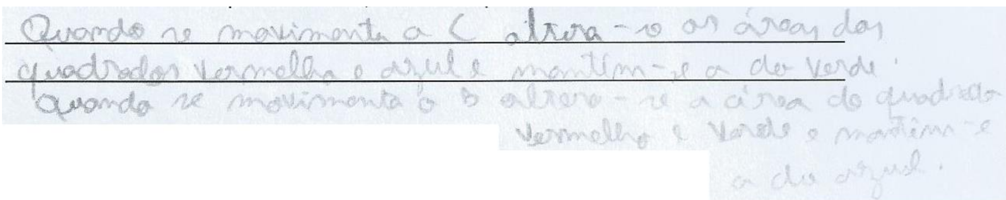
Figura 5.48.: Tarefa 4, Quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Após a concretização da Tarefa 4 – Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão **Observação**

9.* Os alunos deram dois tipos de resposta:

- observaram apenas visual e geometricamente o que acontecia às figuras quando os pontos B ou C eram movimentados (Figura 5.49.);



(Quando se movimenta o C altera-se as áreas dos quadrados vermelho e azul e mantém-se a do verde. Quando se movimenta o B altera-se o área do quadrado vermelho e verde e mantém-se a do azul)

Figura 5.49.: Resposta do aluno C5.

- tiveram em atenção os resultados que iam surgindo na **Folha de Cálculo** concluindo o que se pretendia (Figura 5.50.).

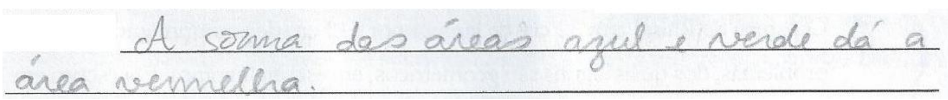


Figura 5.50.: Resposta do aluno C21

10.* Todos os alunos completaram corretamente a tabela dada (Figura 5.51.).

Área do quadrado de lado $[AC]$	Área do quadrado de lado $[AB]$	Área do quadrado de lado $[CB]$
3.3	27.54	30.84
3.3	+ 27.54 = 30.84	

Figura 5.51.: Resposta do aluno C21.

Com a utilização da **Folha de Cálculo** do *GeoGebra* os alunos puderam verificar mais rapidamente que a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

No entanto, considero que as questões **9.** e **10.** deveriam ser melhoradas para que os alunos respondessem ao que realmente se pretende (na questão **9.**) e serem eles próprios a concluir a relação que existe entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo (na questão **10.**).

Tarefa 5 – (Tarefa 5 (pdf) e Tarefa 5.ggb (*GeoGebra*)) (Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano)

A. Semicírculos, cuja medida do diâmetro é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo;

B. Triângulos Equiláteros, cuja medida do comprimento do lado é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo.

A maior parte das vezes, quando lecionamos um conteúdo, ficámos pelo essencial e muitas vezes perdemos a oportunidade de aguçar a curiosidade dos alunos. Se o fizéssemos mais vezes, certamente que, a partir de um certo momento, seriam eles a questionarem-nos sobre a existência de outras possibilidades. Assim, e seguindo este propósito, pretendi que os alunos verificassem com outras figuras geométricas planas pois a relação verificada na tarefa anterior não se atesta apenas com quadrados, que é a única que se aborda aquando da lecionação deste conteúdo. Portanto, e com base nesta tarefa, surge a Tarefa 5 que explora a relação entre o Teorema de Pitágoras e as áreas de Figuras Planas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, mas considerando outras figuras geométricas construídas sobre esses lados, como semicírculos (**A.**) e triângulos equiláteros (**B.**).

11. Será que esta propriedade apenas se verifica com quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo?

Vamos verificar com semicírculos e triângulos equiláteros.

Acede ao ficheiro **Tarefa 5.ggb** e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A.

A. Semicírculos, cuja medida do diâmetro é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo;

12. Visualiza os semicírculos construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado.

13. Visualiza a área de cada um dos semicírculos.

14. Visualiza a **Folha de Cálculo**. Movimentando um dos pontos B ou C, verifica o que acontece.

____

Área do semicírculo de diâmetro $[AC]$	Área do semicírculo de diâmetro $[AB]$	Área do semicírculo de diâmetro $[CB]$
+	=	

B. Triângulos Equiláteros, cuja medida do comprimento do lado é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo.

15. Desseleciona os semicírculos construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado e as respetivas áreas.

16. Visualiza os triângulos equiláteros construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado.

17. Visualiza a área de cada um dos triângulos equiláteros.

18. Visualiza a **Folha de Cálculo**. Movimentando um dos pontos B ou C, verifica o que acontece.

____

Área do triângulo equilátero de lado $[AC]$	Área do triângulo equilátero de lado $[AB]$	Área do triângulo equilátero de lado $[CB]$
+	=	

Conclusão	O Teorema de Pitágoras também se pode concluir se considerarmos outras figuras geométricas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, nomeadamente semicírculos e triângulos equiláteros.

A resolução da tarefa teve o auxílio do *software GeoGebra* (Figuras 5.52., 5.53. e 5.54.). Segue-se a visualização da construção elaborada que explora a relação entre o Teorema de Pitágoras e as áreas de Figuras Planas construídas sobre os lados do triângulo retângulo (Figura 5.52.), mas considerando outras figuras geométricas construídas sobre esses lados, como semicírculos (Figura 5.53.) e triângulos equiláteros (Figura 5.54.) e a análise às respostas dadas pelos alunos.

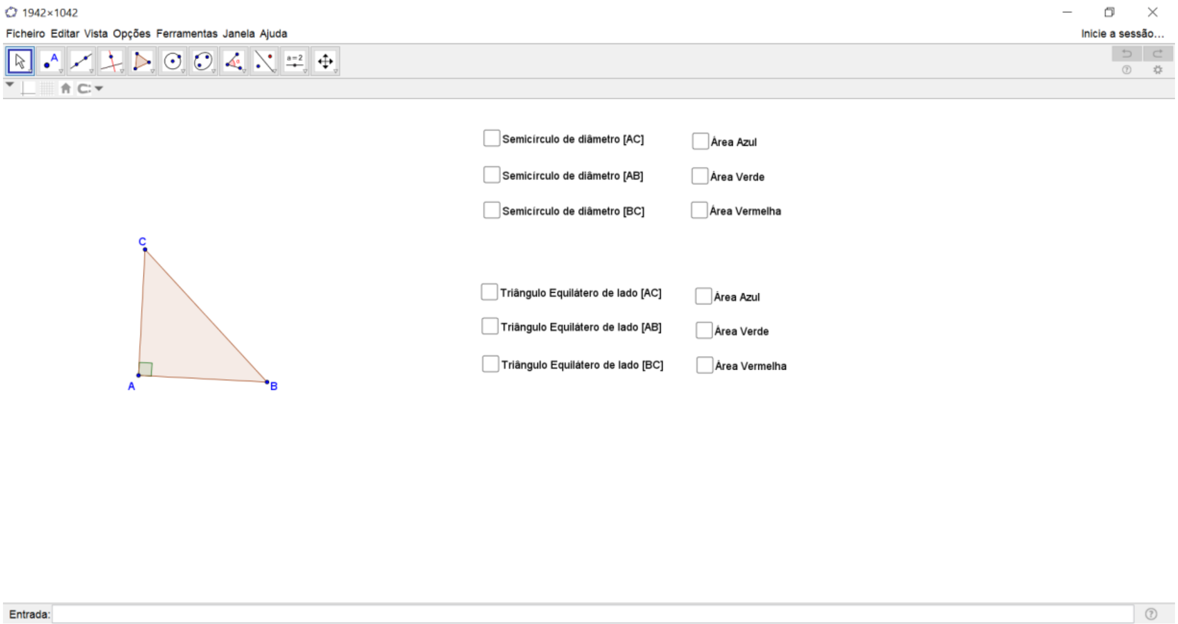


Figura 5.52.: Tarefa 5, Triângulo Retângulo.

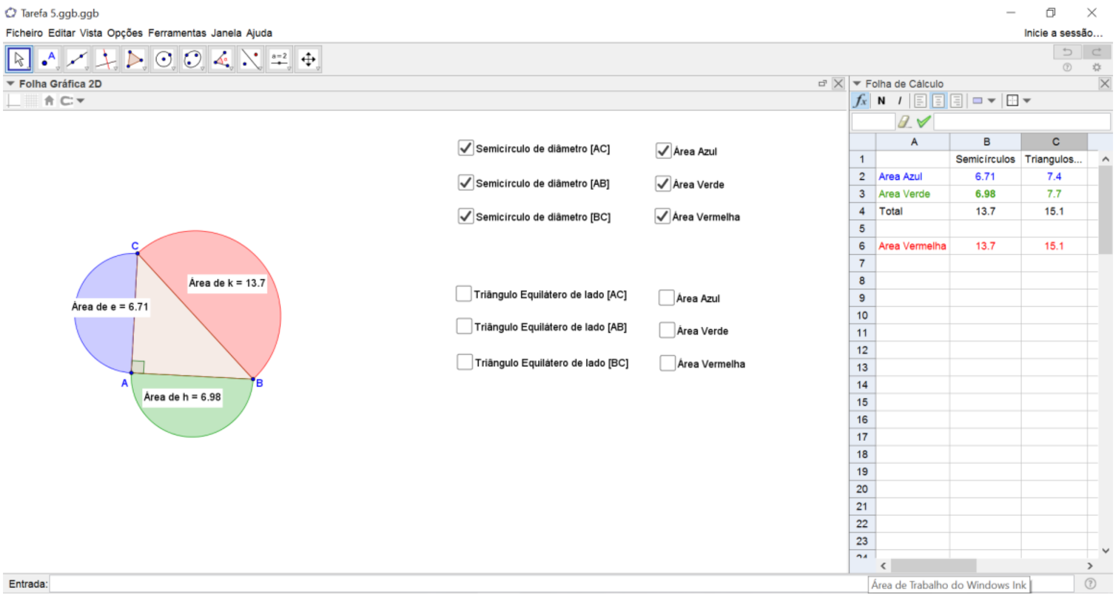


Figura 5.53.: Tarefa 5 – A, Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

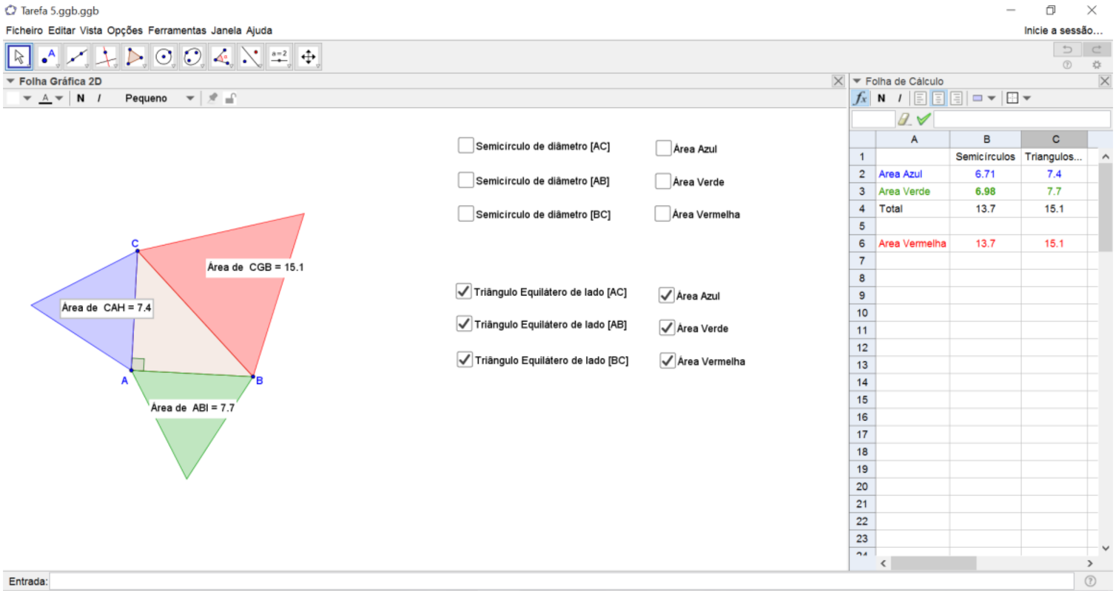


Figura 5.54.: Tarefa 5 – B., Semicírculos construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Após a concretização da Tarefa 5 – Semicírculos e Triângulos Equiláteros construídos sobre os lados de um Triângulo Retângulo, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	Observação
14.* **18.***	Grande parte dos alunos concluiu que a soma das medidas das áreas das figuras geométricas consideradas construídas sobre os catetos era igual à medida da área dessas figuras geométricas construídas sobre a hipotenusa.

Tal como na **Tarefa 4.**, as questões **14.** e **18.** também seriam melhoradas, à semelhança das questões **9.** e **10.**.

5.1.3. Experiência na Turma do 9.º ano

Esta era a única turma da qual eu não era docente. A turma encontrava-se, no momento da aplicação da tarefa, a iniciar o capítulo *Trigonometria no Triângulo Retângulo* com o tema “Razões Trigonométricas de um ângulo Agudo”. Assim, e à semelhança das outras turmas envolvidas na investigação, as planificações das atividades foram pensadas e elaboradas no sentido de ir ao encontro deste mesmo tema, desafiando-me a, gradualmente e utilizando e relacionando os conhecimentos prévios dos alunos, utilizar o *software GeoGebra* para atingir o objetivo final: a compreensão dos critérios de semelhança de triângulos.

Quase todos os alunos referiram, aquando da entrevista, que pouco tinham utilizado este *software*, embora alguns deles já tivessem presenciado, pontualmente no 2.º ciclo e nos dois últimos anos, a sua aplicação.

A Parte I da investigação nesta turma não foi possível realizar-se numa sala com computadores, tal como aconteceu nas outras turmas, uma vez que a mesma não estava disponível. Assim, a atividade foi projetada e discutida em grande grupo, sendo a professora titular da turma o sujeito ativo da manipulação do *GeoGebra* construído para esta tarefa, que o fez segundo as indicações dos alunos.

5.1.3.1. Trigonometria no Triângulo Retângulo

Aplicação da tarefa:

Este tema envolveu apenas uma tarefa, a qual foi aplicada numa só aula (45 minutos).

Organização dos alunos:

Para a realização desta tarefa, e dado que a sala de informática não estava disponível, a tarefa foi desenvolvida em grande grupo, sendo a docente titular de turma a responsável pelo manuseamento da tarefa no *GeoGebra* e os alunos sujeitos ativos na sugestão e indicação dos passos a seguir.

Enunciado das tarefas:

Foi entregue a cada aluno uma Ficha de Trabalho – Parte I (Anexo F – Ficha de Trabalho 9.º ano) com orientações para o desenvolvimento das tarefas, quer ao nível da utilização do *software GeoGebra* quer das observações e conclusões a registar em cada uma.

Recursos utilizados:

- Computador (1 para o professor);
- Software GeoGebra (previamente instalado em cada computador);
- Tarefa 6 construída no GeoGebra;

– Projetor;
– Ficha de trabalho;
– Material de escrita.

Conhecimentos prévios necessários:

Neste capítulo deu-se continuidade a conhecimentos já lecionados, tais como:

– semelhança de triângulos.

Assim, e de acordo com o documento orientador *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico - 1.º, 2.º e 3.º Ciclos*, a revisão desses conhecimentos incidiu no âmbito dos domínios:

Geometria e Medida (GM7):

➢ **Paralelismo, congruência e semelhança**

– Isometrias e semelhanças;
– Teorema de Tales.
– Critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL e AA); igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes.

Na aula anterior à aplicação da tarefa 6, foram realizadas atividades de diagnóstico e de revisão com o objetivo de:

– identificar problemas de aprendizagem;
– rever conteúdos essenciais às novas aprendizagens;
– aferir o domínio de pré-requisitos essenciais à aprendizagem de conteúdos a lecionar no capítulo;
– promover intervenções pedagógicas de modo a auxiliar o aluno a superar as dificuldades diagnosticadas.

Conteúdos a abordar:

Geometria e Medida (GM9):

➢ **Trigonometria**

– Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo;

Capacidades Transversais:

- Resolução de problemas;
- Raciocínio Matemático;
- Comunicação Matemática.

Objetivos das Capacidades Transversais:

- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos;
- Usar raciocínio indutivo;
- Interpretar informação, ideias e contextos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
- Representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Desenvolver o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos;
- Desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, formulando e testando conjeturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos e cadeias dedutivas;
- Desenvolver a capacidade de comunicar oralmente e por escrito, em linguagem natural e em linguagem matemática, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprio;
- Desenvolver a capacidade de organizar e representar as resoluções de exercícios e de problemas.

Objetivos Gerais das Tarefas / Atividades:

- Explorar e investigar situações geométricas;
- Explorar conceitos e propriedades geométricas numa lógica de resolução de problemas;
- Explorar a intuição geométrica e a capacidade de visualização;
- Resolução de problemas;
- Explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema;
- Ampliar e reduzir figuras recorrendo a AGD, nomeadamente, o *software GeoGebra*;
- Ampliar conhecimentos;
- Definir novas estratégias para a resolução de problemas;
- Proporcionar aos alunos novas situações que permitam a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão de novos conceitos.

Objetivos Específicos:

- Determinar as razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Justificar que dois ângulos agudos com a mesma amplitude têm razões trigonométricas iguais;
- Justificar que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) é independente da unidade de comprimento fixada;
- Justificar que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que a unidade;

Objetivos / Metas Curriculares:

Subdomínio	Objetivo Geral	Descritores
Paralelismo, congruência e semelhança (GM9)	11. Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos	11.1., 11.2., 11.3., 11.4., 11.5., 11.6., 11.7. e 11.8.

Descrição e implementação da tarefa:

Foram colocadas situações aos alunos que permitiram recordar e aplicar os critérios de semelhança de triângulos. Os alunos registaram as suas observações / conclusões na Ficha de Trabalho para, no final, identificarem as Razões Trigonométricas. Com o *GeoGebra*, os alunos deviam manipular, experimentar e investigar sobre a razão entre as medidas dos comprimentos dos lados de triângulos retângulos semelhantes pelo critério AA, realizando os desafios apresentados pelas tarefas. Não foi interposto limite de tempo para cada tarefa, no entanto, pretendia-se que a tarefa 6 fosse realizada durante 90 minutos.

Tarefa 6 – "A um Passo da Trigonometria no Triângulo Retângulo" (Tarefa 6 (pdf) e Tarefa 6.ggb (*GeoGebra*)) (Anexo F – Ficha de Trabalho 9.º ano)

Os alunos resolveram as atividades propostas nesta Tarefa 6, que a seguir se apresenta, a qual incluía a observação dos triângulos retângulos e análise da semelhança entre eles, a exploração das razões trigonométricas e a conclusão quanto à variação das mesmas.

A UM PASSO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Acede ao ficheiro **Tarefa 6.ggb** e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A, e o seletor α (que indica a amplitude de um dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Os pontos A, D, F e B são pontos móveis, ou seja, são pontos que se podem deslocar para obter outros triângulos retângulos.

1. Visualiza os segmentos de reta $[DE]$ e $[FG]$ perpendiculares ao segmento de reta $[AB]$. Com o rato, desloca os pontos D e F.

2. Justifica que os triângulos $[ABC]$, $[DBE]$ e $[FBG]$ são semelhantes entre si, indicando o critério de semelhança que utilizaste.

   ____

   ____

3. Desloca o seletor para considerares uma amplitude para o ângulo α: $\alpha =$ _____°

4. Completa a tabela com as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos.

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$
Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude α			
Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude α			
Comprimento da hipotenusa			

5. Usando os valores registados na tabela anterior, completa a tabela seguinte e calcula:

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$	**Razão Trigonométrica**
$\dfrac{Comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ de\ amplitude\ \alpha}{Comprimento\ da\ hipotenusa}$				Seno: $sen\ \alpha$
$\dfrac{Comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ de\ amplitude\ \alpha}{Comprimento\ da\ hipotenusa}$				Cosseno: $\cos\alpha$
$\dfrac{Comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ de\ amplitude\ \alpha}{Comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ de\ amplitude\ \alpha}$				Tangente: $\tan\alpha$

6. Observa os valores obtidos em cada uma das linhas da tabela anterior.
   O que concluis em relação às razões calculadas em cada linha?

   ____

   Porque se verificará isso? ____

7. Desloca o seletor para considerares outra(s) amplitude(s) para o ângulo α.

O que podes concluir?

____

8. Admite que se constrói outro triângulo retângulo semelhante aos da construção apresentada.

O que podes concluir quanto ao valor da razão entre:

- **a.** o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α ? ___________

- **b.** o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa? ___________

- **c.** o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa? ___________

9. Visualiza a **Folha de Cálculo** (em *Vista* → *Folha de Cálculo*) onde se encontram as razões trigonométricas $seno$, $cosseno$ e $tangente$ do ângulo considerado.

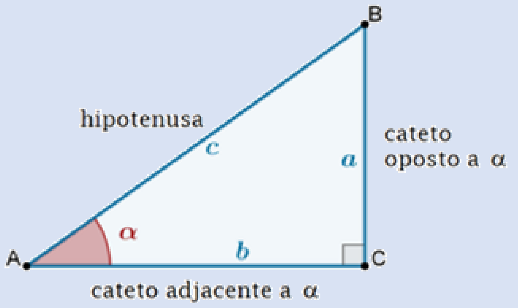
Desloca várias vezes o seletor α e observa na Folha de Cálculo os valores obtidos.

Entre que valores variam as razões trigonométricas $seno$ e $cosseno$ de um ângulo agudo?

____

10. Completa, utilizando as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$:

Razões Trigonométricas de um Ângulo Agudo



$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \_\_\_\_$ $\quad$ $\boldsymbol{cos\ \alpha} = \_\_\_\_$ $\quad$ $\boldsymbol{tan\ \alpha} = \_\_\_\_$

Esta tarefa foi realizada com o auxílio do *software GeoGebra* (Figuras 5.38. e 5.39), onde se seguem as visualizações da construção elaborada, ou seja, dos triângulos retângulos e análise da semelhança entre eles (Figura 5.55.); a exploração das razões trigonométricas (Figura 5.56.) e a conclusão quanto à variação das mesmas (Figura 5.57.).

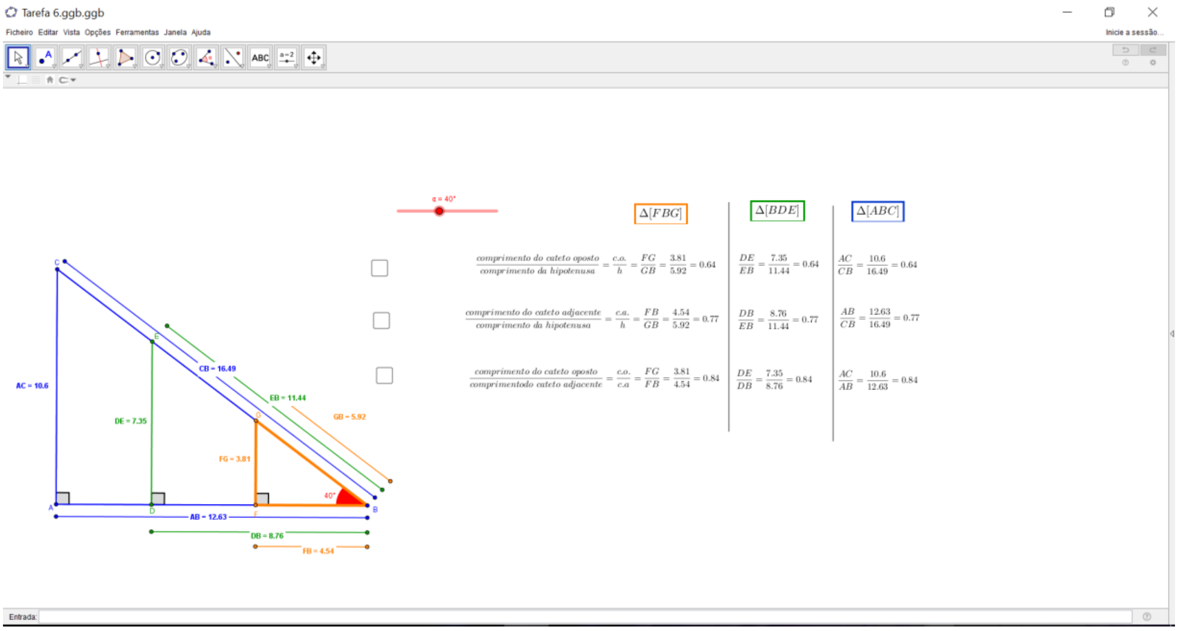


Figura 5.55.: Tarefa 6, Triângulos Semelhantes.

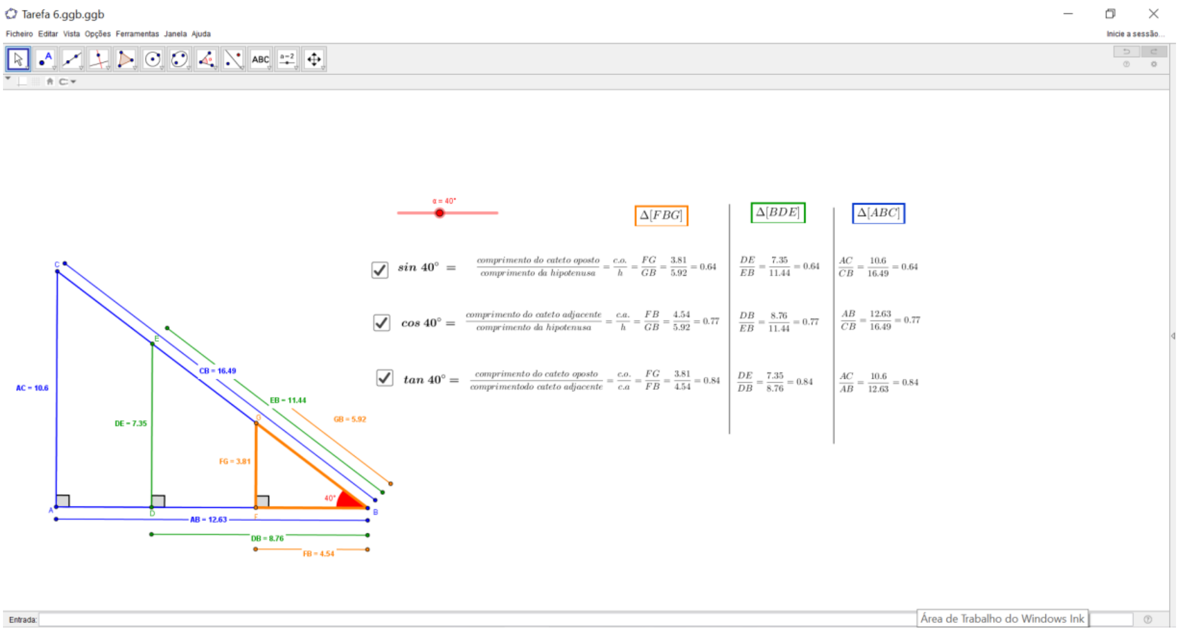


Figura 5.56.: Tarefa 6, Razões Trigonométricas para o mesmo ângulo.

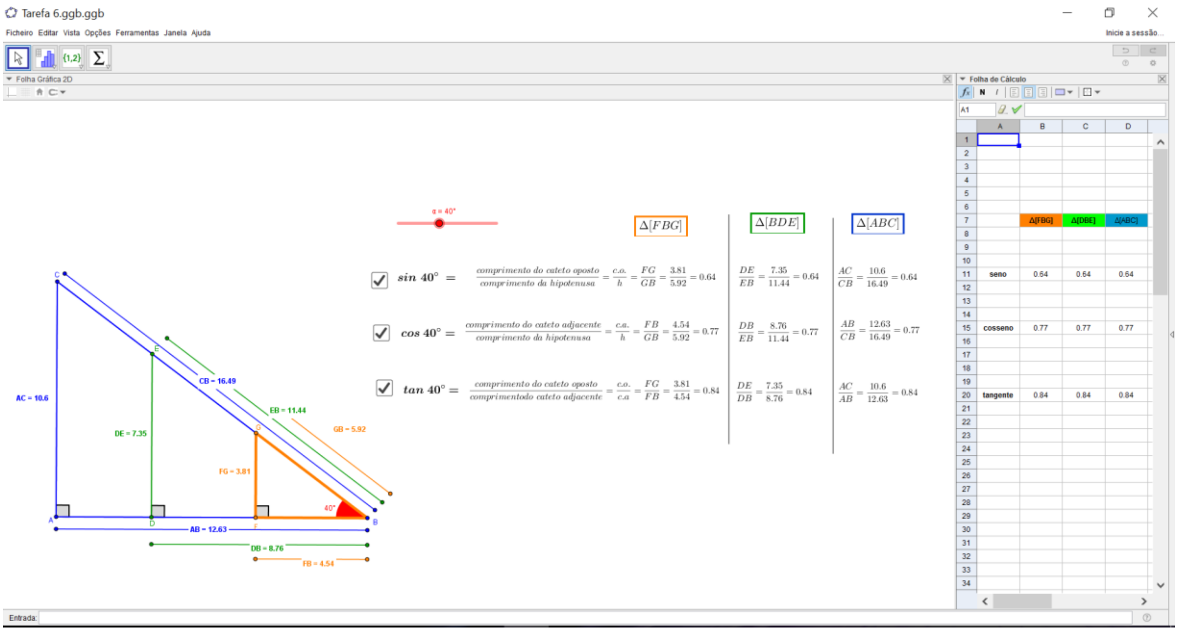


Figura 5.57.: Tarefa 6, variação das Razões Trigonométricas, visualizando a Folha de Cálculo.

Após a entrega da Ficha de Trabalho aos alunos, solicitou que todos fizessem uma leitura até à questão **1.**. De seguida, pediu aos alunos que lhe fossem dizendo os passos a seguir, como se fossem eles a utilizar o computador. Esta interação, apesar de se verificar dependência de ambas as partes, decorreu da melhor forma.

Concluída a Tarefa 6 – A um passo da Trigonometria no Triângulo Retângulo, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

Questão	**Observação**
1.	Os alunos pediram que a professora deslocasse, primeiro o ponto F e de seguida o ponto D, observando as ocorrências que daí advinham.
2.	Os alunos foram capazes de identificar o critério de semelhança de triângulos (Figura 4.58.) que permitia justificar que os triângulos dados eram semelhantes entre si. De referir que os critérios de semelhança já tinham sido alvo de revisão no capítulo Áreas e Volumes de Sólidos, anteriormente estudado.

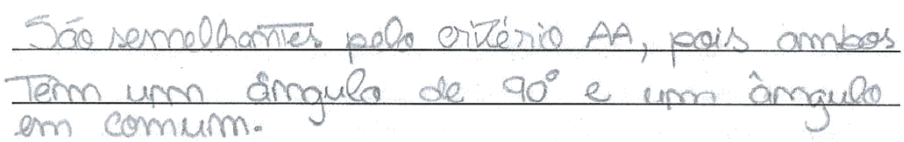


Figura 5.58.: Resposta do aluno B7.

3. Os alunos sugeriram dois valores para a medida da amplitude do ângulo α: $20°$, $45°$ e $55°$ para o estudo das razões trigonométricas.

4. Os alunos registaram as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos para a medida da amplitude do ângulo α considerada, neste caso $45°$ (Figura 5.59.).

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$
Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude α	12,63	9,3	5,65
Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude α	12,63	9,3	5,65
Comprimento da hipotenusa	17,86	13,15	7,98

Figura 5.59.: Resposta do aluno B6.

5. Os alunos preencheram a tabela (Figura 5.60.) com as razões entre as medidas dos comprimentos dos lados considerados em cada um dos triângulos, por observação do *GeoGebra*, verificando que a mesma razão era igual nos diferentes triângulos. Após discussão em grande grupo destes resultados, a professora questionou os alunos sobre o que seria a informação que constava na última coluna da tabela, ao que um aluno respondeu que seria a nomenclatura de cada uma das razões calculadas.

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$	Razão Trigonométrica
$\dfrac{\textit{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude } \alpha}{\textit{Comprimento da hipotenusa}}$	$\frac{12,63}{17,86}=0,71$	$\frac{9,3}{13,15}=0,71$	$\frac{5,65}{7,98}=0,71$	Seno: $sen\ \alpha$
$\dfrac{\textit{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude } \alpha}{\textit{Comprimento da hipotenusa}}$	$\frac{12,63}{17,86}=0,71$	$\frac{9,3}{13,15}=0,71$	$\frac{5,65}{7,98}=0,71$	Cosseno: $cos\ \alpha$
$\dfrac{\textit{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude } \alpha}{\textit{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude } \alpha}$	$\frac{12,63}{12,63}=1$	$\frac{9,3}{9,3}=1$	$\frac{5,65}{5,65}=1$	Tangente: $tan\ \alpha$

Figura 5.60.: Resposta do aluno B6.

6. A resposta à primeira questão já tinha sido dada na questão anterior (Figuras 5.61. e 5.62.).

As razões são iguais

Figura 5.61.: Resposta do aluno B7.

O resultado é sempre o mesmo

Figura 5.62.: Resposta do aluno B6.

Relativamente à segunda questão, e como os alunos estavam todos a observar três possíveis valores para a medida da amplitude do ângulo α ($20°$, $45°$ e $55°$), embora apenas registassem os valores relativos a um deles, os alunos responderam corretamente pois tratava-se do mesmo ângulo (Figuras 5.63. e 5.64.).

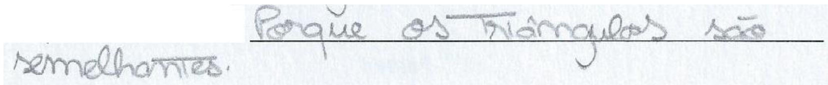
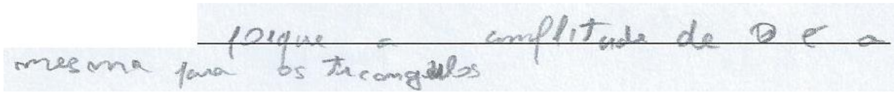

Porque os triângulos são semelhantes.

Figura 5.63.: Resposta do aluno B7.


Porque a amplitude de B é a mesma para os triangulos

(Porque a amplitude de B é a mesma para os triângulos)

Figura 5.64.: Resposta do aluno B17.

7. A professora deslocou o seletor para vários valores, inclusive valores solicitados pelos alunos, tendo estes concluído que os valores das razões trigonométricas não sofriam alterações em cada triângulo (Figura 5.65.).

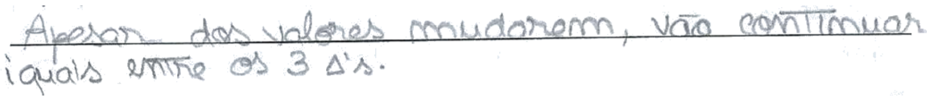
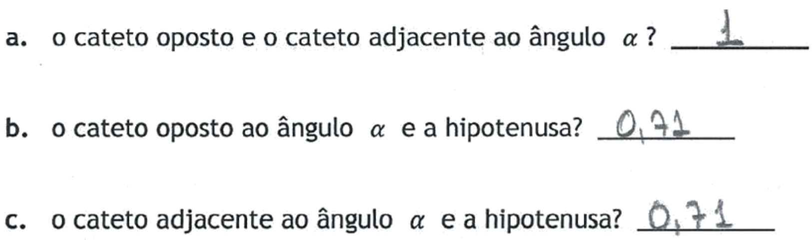

Apesar dos valores mudarem, vão continuar iguais entre os 3 Δ's.

Figura 5.65.: Resposta do aluno B7.

8. Os alunos concluíram que, sendo um triângulo semelhante aos triângulos considerados, as razões eram iguais às que tinham sido registadas na questão **5.** (Figura 5.66.). De referir que apenas um aluno identificou as razões trigonométricas e o respetivo valor em cada uma das alíneas (Figura 5.67.).


a. o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α ? 1

b. o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa? 0,71

c. o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa? 0,71

Figura 5.66.: Resposta do aluno B6.

a. o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α ? $tg\alpha = 0,70$

b. o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa? $sen\alpha = 0,57$

c. o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa? $cos\alpha = 0,82$

Figura 5.67.: Resposta do aluno B5.

9. Ao visualizarem a **Folha de Cálculo** e deslocando o seletor para diferentes valores, desde o menor valor ($1°$) até ao maior valor possível ($89°$), os alunos concluíram que as razões trigonométricas $seno$ e $cosseno$ apenas assumem valores inferiores a 1 (Figuras 5.68., 5.69. e 5.70.).

Quanto menor o valor do ângulo o valor do seno aumenta e o cosseno diminui.

(Quanto menor o valor do ângulo o valor do seno aumenta e o cosseno diminui)

Figura 5.68.: Resposta do aluno B13.

Os valores de seno aumento com o aumentar do ângulo (de 0,09 a 1) e o cosseno diminui com o aumentar do ângulo (de 1 a 0,02).

(Os valores de seno aumento com o aumentar do ângulo (de 0,09 a 1) e o cosseno diminui com o aumentar do ângulo (de 1 a 0,02))

Figura 5.69.: Resposta do aluno B6.

Os valores das razões trigonométricas do seno e do cosseno de um ângulo agudo varia entre 0 e 1.

(Os valores das razões trigonométricas do seno e do cosseno de um ângulo agudo varia entre 0 e 1)

Figura 5.70.: Resposta do aluno B14.

Conclusão Os alunos generalizaram corretamente as razões trigonométricas para qualquer triângulo retângulo (Figuras 5.71. e 5.72.).

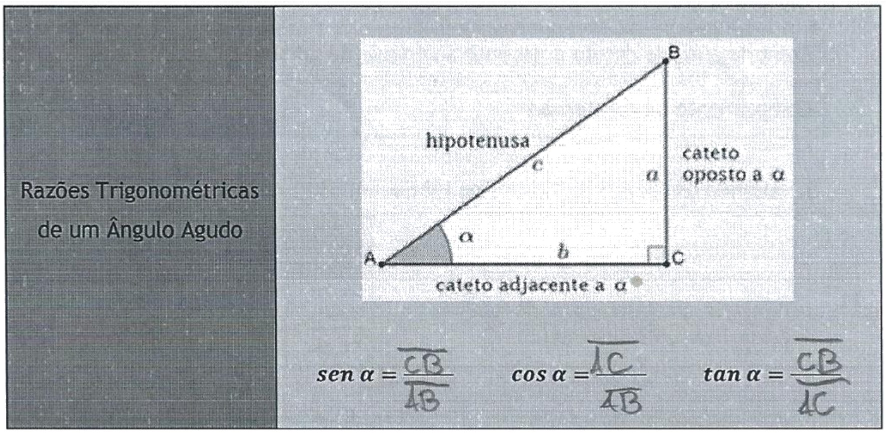


Figura 5.71.: Resposta do aluno B9.

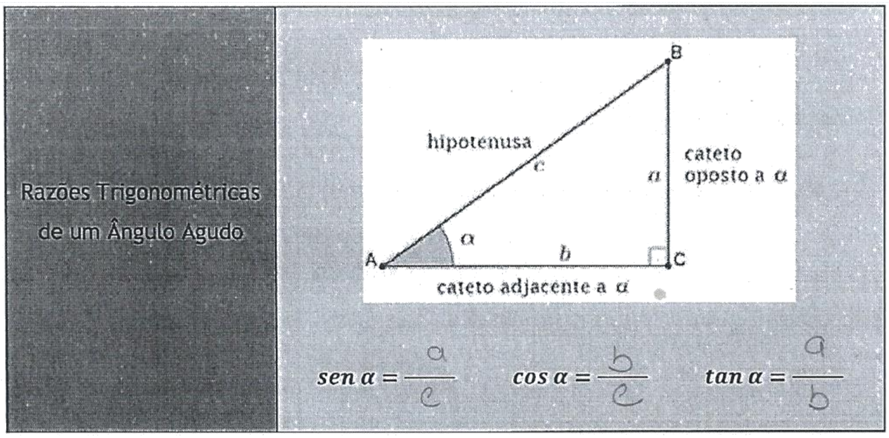


Figura 5.72.: Resposta do aluno B7.

5.2. Experiência nas Turmas do 3.º Ciclo – Parte II

Esta tarefa contemplava quatro objetivos: levar a história Matemática à sala de aula, procurando semelhanças e/ou diferenças na forma como pensavam, neste caso, os geómetras egípcios no cálculo de áreas de quadriláteros convexos; relembrar as propriedades dos Quadriláteros, nomeadamente dos Paralelogramos; utilizar as novas tecnologias, neste caso, um AGD – *GeoGebra*, para comparar o antes e o agora e trabalhar algebricamente algumas questões.

As turmas do 7.º ano tinham terminado o estudo dos Quadriláteros, pelo que as propriedades dos mesmos, em particular dos Paralelogramos, ainda estavam bem presentes. Quanto as turmas 8.º C e 9.º B, esta tarefa serviu também para rever essas propriedades.

5.2.1. Tarefa Papiro de Rhind – “A Matemática na Antiguidade: O Papiro de Rhind e os problemas geométricos… - Áreas de Quadriláteros Convexos”

Esta tarefa constituiu um verdadeiro desafio por vários motivos: pela construção feita com recurso ao *GeoGebra* e pelo desenvolvimento da mesma pois, apesar de ser uma tarefa comum aos três anos de escolaridade, obrigou a abordagens diferentes em algumas questões. A tarefa, para os três anos, é constituída por dez questões, no entanto as questões **7.** e **8.** seguem uma abordagem diferente nos 7.º/8.º e 9.º anos bem como a questão **10.** nos 7.º e 8.º/9.º anos.

A tarefa inicia-se com uma breve abordagem histórica sobre o Papiro de Rhind e os problemas geométricos e explora o cálculo das medidas das áreas de quadriláteros convexos. Os geómetras egípcios utilizavam a seguinte fórmula no seu cálculo:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

Sabendo que a , b , c e d correspondem aos lados sucessivos de um quadrilátero convexo.

Um dos objetivos desta tarefa é comparar a medida da área de alguns dos quadriláteros mais utilizados: os paralelogramos (retângulo, quadrado, paralelogramo e losango) obtidas pelas fórmulas convencionais (as que hoje em dia se utilizam) com a fórmula utilizada pelos geómetras egípcios. Esta comparação pressupõe que os alunos obtenham, no *GeoGebra*, as várias representações dos diferentes paralelogramos. Para isso, terão de ter presentes as suas propriedades, como:

- medida da amplitude dos ângulos internos;
- medida dos comprimentos dos lados;
- diagonais.

Com estes registos, os alunos terão de concluir se os geómetras egípcios tiveram ou não em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros considerados e em quais é que a fórmula é válida.

De seguida, terão de visualizar o erro que é cometido no cálculo das medidas das duas áreas em função da medida da amplitude de um ângulo interno do quadrilátero e concluir quando é que esse erro é máximo e mínimo. Solicita-se, então, ao aluno que indique o que, na sua opinião, deveria ser substituído/considerado para que a fórmula utilizada pelos egípcios seja válida para qualquer paralelogramo.

Seguidamente, propõe-se que trabalhem a fórmula dada, com os conhecimentos que possuem, e que cheguem à conclusão de que:

– nos casos do 7.º e 8.º anos: $A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d) \Leftrightarrow A = a \times b$

– no caso do 9.º ano: $A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d) \Leftrightarrow A = a \times b \times \sin\alpha$

– nos 7.º, 8.º e 9.º anos: $A \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$

Por fim, pretende-se que os alunos, recorrendo à linguagem algébrica, cheguem à fórmula dada através de um possível raciocínio, tendo por base o conhecimento da fórmula utilizada para o cálculo da medida da área de um triângulo.

Aplicação da tarefa:

Este tema foi dividido em duas tarefas, as quais foram aplicadas na mesma aula (90 minutos).

Organização dos alunos:

Para a realização destas tarefas, e dado o número de computadores disponíveis, os alunos organizaram-se em grupos de dois por computador.

Enunciado das tarefas:

Foi entregue a cada aluno uma Ficha de Trabalho – Parte II (Anexos D, E e F) com orientações para o desenvolvimento das tarefas, quer ao nível da utilização do *software GeoGebra* quer das observações e conclusões a registar em cada uma.

Recursos utilizados:

- Computadores (1 por cada 2 alunos e 1 para o professor);
- *Software GeoGebra* (previamente instalado em cada computador);
- Tarefa Papiro de Rhind construída no *GeoGebra*;
- Projetor;
- Ficha de trabalho;
- Material de escrita.

Conhecimentos prévios necessários:

Rever conteúdos relacionados com áreas de Triângulos e Quadriláteros (5.º ano) e Quadriláteros (lecionados no 7.º ano), no âmbito dos domínios:

Geometria e Medida (GM5):

- **Propriedades geométricas**

  Triângulos e quadriláteros

  - (…) altura de um triângulo e de um paralelogramo.

Álgebra (ALG5):

- **Expressões algébricas e propriedades das operações**
  - Propriedades associativa e comutativa da adição e multiplicação e propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição (…);
  - Linguagem natural e linguagem simbólica.

Geometria e Medida (GM7):

- **Figuras geométricas**

  Quadriláteros

  - Diagonais de um quadrilátero;
  - Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais;
  - Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros.

- **Medida**

  Áreas de quadriláteros

  - Área do (…) losango.

Álgebra (ALG8):

- **Monómios e Polinómios**
  - Monómios semelhantes; forma canónica de um monómio; igualdade de monómios;
  - Soma algébrica e produto de monómios;
  - Polinómios; (…) forma reduzida (…);
  - Soma algébrica e produto de polinómios;

- Problemas associando polinómios a medidas de áreas (…), interpretando geometricamente igualdades que os envolvam;
- Problemas envolvendo polinómios (…) e fatorização.

Objetivos Gerais das Tarefas / Atividades:

- Explorar e investigar situações geométricas;
- Explorar conceitos e propriedades geométricas numa lógica de resolução de problemas;
- Explorar a intuição geométrica e a capacidade de visualização;
- Resolução de problemas;
- Explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspetivas de um problema;
- Representar Paralelogramos recorrendo a AGD, nomeadamente, o *software GeoGebra*.

Objetivos / Metas Curriculares:

Subdomínio	Objetivo Geral	Descritores
Propriedades Geométricas (GM5)	2. Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos	2.7.
Expressões algébricas (ALG5)	1. Conhecer e aplicar as propriedades das operações	1.2. e 1.11
Figuras Geométricas (GM7)	2. Classificar e construir quadriláteros	2.9., 2.14., 2.15., 2.16., 2.17. e 2.18.
	3. Resolver problemas	3.1.
	8. Calcular medidas de áreas de quadriláteros	8.1.
Monómios e Polinómios (ALG8)	4. Resolver problemas	4.1. e 4.2.

Descrição e implementação da tarefa:

Os alunos resolveram as atividades propostas nesta tarefa, a qual iniciava com uma abordagem histórica sobre um problema geométrico presente no Papiro de Rhind.

De seguida, segue-se a atividade prática, onde é feita uma breve descrição sobre os elementos (seletores, classificação dos quadriláteros, fórmulas das áreas e cálculo das medidas das áreas dos quadriláteros - paralelogramos e fórmula utilizada pelos geómetras egípcios no cálculo de áreas de quadriláteros convexos e o respetivo cálculo das medidas das áreas aplicadas aos quadriláteros -

paralelogramos) que constituem a construção elaborada em *GeoGebra* para a presente atividade. Acedendo à **Folha de Cálculo**, podem-se observar três colunas (A, B e C) onde constam a área do quadrilátero convexo considerado utilizando a fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios; o Erro Cometido no cálculo das medidas das áreas utilizando as duas fórmulas (diferença entre essas duas áreas) e a amplitude de α, respetivamente.

Tarefa "Papiro de Rhind" (Tarefa Papiro de Rhind - 7.º ano, 8.º ano, 9.º ano (pdf) e Tarefa Papiro de Rhind.ggb (*GeoGebra*))

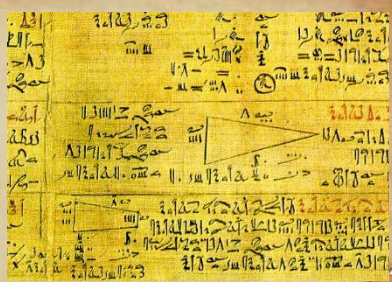
Os alunos resolveram as atividades propostas nesta Tarefa Papiro de Rhind, que a seguir se apresenta, a qual incluía a exploração e observação de quadriláteros convexos, nomeadamente os paralelogramos, a sua representação e o cálculo da respetiva área utilizando as fórmulas convencionais e a fórmula utilizada pelos geómetras egípcios.

Como referido anteriormente, a tarefa difere em algumas questões para os três anos de escolaridade em que foi aplicada. Essas diferenças encontram-se a seguir identificadas.

A MATEMÁTICA NA ANTIGUIDADE

O Papiro de Rhind e os problemas geométricos…

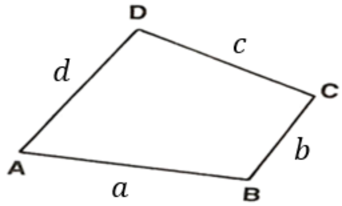
É o documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia, e de onde provém grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática. Foi comprado em 1858, por Alexander Henry Rhind e, atualmente, encontra-se no Museu Britânico.



O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e consta de 87 problemas, dos quais alguns são geométricos, em escrita hierática. Foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, daí ser conhecido também por papiro de Ahmes, que, por sua vez, o copiou de um texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

<u>**Áreas de Quadriláteros Convexos**</u>

Considera um quadrilátero convexo de lados sucessivos a , b , c e d.
Os geómetras egípcios da Antiguidade usavam a fórmula:



$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$	**(1)**

para calcular a área (A) de um quadrilátero convexo.

Como se designam os lados a e c do quadrilátero? ____

Acede ao ficheiro Papiro_Rhind.ggb e abre-o.

Os seletores:

- $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AD}$ referem-se aos comprimentos dos lados do quadrilátero $[ABCD]$;
- seletor $\boldsymbol{\alpha}$ refere-se à amplitude de um dos ângulos internos do quadrilátero $[ABCD]$, neste caso, do ângulo BAD.

Consoante a medida do comprimento dos lados e da amplitude do ângulo interno, visualizarás:

- a classificação do quadrilátero correspondente;
- a fórmula convencional para a sua área e o respetivo cálculo;
- fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para a sua área e o respetivo cálculo.

Abrindo a Folha de Cálculo (menu **VISTA** → **Folha de Cálculo)** podes observar:

- na **coluna A** - a área do quadrilátero convexo considerado utilizando a fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios;
- na **coluna C** - o **Erro Cometido** (diferença entre essas duas áreas);
- na **coluna D** – a amplitude de α.

1. Desloca os seletores para obteres os quadriláteros que te são pedidos nas próximas questões.

   No preenchimento das tabelas que se seguem, deverás ter em conta o seguinte:

   - na **Representação** – desenhar o quadrilátero que pretendes e indicar as medidas dos comprimentos considerados bem como do ângulo interno considerado;
   - na **Fórmula Convencional** e na **Fórmula dos geómetras egípcios** - indicar as medidas dos comprimentos considerados. Terás o apoio ao cálculo das áreas na folha gráfica e/ou na **Folha de Cálculo**.

   a. Mostra que esta fórmula utilizada pelos egípcios **(1)** está correta no caso de o quadrilátero ser um retângulo. Para isso, após a representação do retângulo que pretendes analisar, compara a sua área considerando a fórmula convencional e a fórmula utilizada pelos egípcios.

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Retângulo		$A = c \times l$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Quadrado		$A = l^2$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Comparando o resultado obtido pela fórmula convencional com o resultado obtido pela fórmula dos egípcios, o que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do retângulo? ______________________________
- do quadrado? ______________________________

b. Será que o mesmo acontece para este tipo de paralelogramos? Repete o processo anterior, considerando paralelogramos não retângulos.

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Paralelogramo Obliquângulo		$A = b \times h$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Compara os dois resultados obtidos em cada paralelogramo. O que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

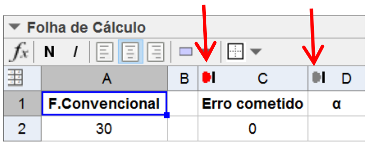
- do paralelogramo obliquângulo? ______________________________________
- do losango? ____

2. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

____

3. Desloca o seletor α para $90°$.

4. Na Folha de Cálculo, clica sobre os símbolos que se encontram nas **células C** e **D**, os quais devem ficar vermelhos.



5. Desloca o seletor α até ao valor mínimo. As **colunas C** e **D** preencher-se-ão automaticamente com o **Erro Cometido** e a amplitude do ângulo α, respetivamente.

6. Observa as **colunas C** e **D**.

Qual a amplitude de α quando o **Erro Cometido** é:

- igual a zero? $\alpha =$ _______
- máximo? $\alpha =$ _______

Completa:

*À medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do **Erro cometido*** __________

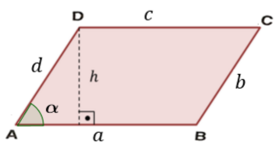
7. O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

____

____

9.º ano

- Confirma a tua resposta utilizando os teus conhecimentos sobre Trigonometria.



Como a e c são lados ___________________ do paralelogramo, logo, a ___ c assim como $b =$ ___.

Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{4}(a + \_\_\_\_)(b + \_\_\_\_) = \frac{\quad \times \quad}{4} = \frac{\qquad}{4}$$

$$= \_\_\_\_\_$$

$$A = a \times b$$

Determina uma expressão que te permita calcular a altura (h) do paralelogramo, utilizando as razões trigonométricas:

$$\_\_\_\_\_\_\ \alpha = \frac{\_\_\_\_\_\_}{b} \Leftrightarrow h = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Para a fórmula ser válida teríamos de ter

$$A = a \times h$$

Substituindo h pela expressão encontrada:

$$A = a \times \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

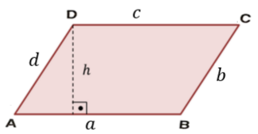
Então, para termos uma fórmula válida para qualquer paralelogramo, teríamos de ______________________ a expressão $A = a \times b$ por __________.

7.º/8.º anos

8. Vamos mostrar em que casos a igualdade seguinte se verifica, ou seja, em que paralelogramos a área calculada usando a fórmula convencional é igual à área calculada usando a fórmula dos geómetras egípcios:

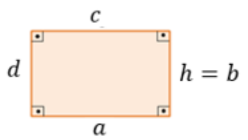
$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$.
Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica?



____

Então,



$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

Como a e c são lados _______________ do paralelogramo, logo, a ___ c assim como $b =$ ___.

Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a + a)(b + \_\_\_) \Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

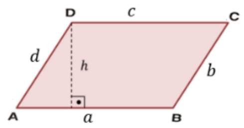
Onde se conclui que: $\Leftrightarrow\ A = a \times b$

9.º ano

8. Em que casos a igualdade seguinte se verifica, ou seja, em que paralelogramos a área calculada usando a fórmula convencional é igual à área calculada usando a fórmula dos geómetras egípcios:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$.
Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica?



____

9. Como pudeste concluir na **questão 1.**, nem sempre a área de um paralelogramo é igual quando calculada usando fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios.
Vamos mostrar que, na realidade, para um quadrilátero convexo, é verdade que:

$$A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

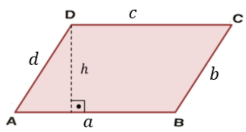
ou seja, a área calculada pela fórmula convencional é sempre menor ou igual à área quando calculada pela fórmula dos egípcios.

Área de um Paralelogramo

$A = base \times altura$

ou seja,

$A = a \times h$



Repara que, dependendo do paralelogramo, a medida da altura (h) é menor ou igual à medida do lado (b), ou seja: $h \leq b$.

Se multiplicarmos ambos os membros por a:

$$\times a \qquad h \leq b$$

$$\underbrace{\_\_\_ \times h} \leq \_\_\_ \times b$$

Sabendo que $A = a \times h$, então $\_\_\_ \leq \_\_\_\_\_\_\_\_$

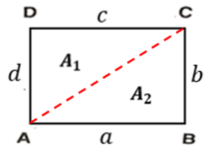
E como, $A = a \times b = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

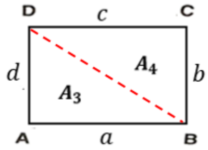
Concluindo que $\boxed{A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)}$

10. Como terão os egípcios chegado à fórmula **(1)**?
Os egípcios conheciam, possivelmente, a regra para o cálculo da área de triângulos.

Vamos tentar fazer como eles!

Uma possível explicação para chegar a esta fórmula seria:





$$A_1 = \frac{c \times d}{2} = \frac{cd}{2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\underline{\qquad}}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}}$$

$$A_3 = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} \quad \text{e} \quad A_4 = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}}$$

$$A_3 + A_4 = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{\underline{\quad}}$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por __

$$A = \frac{cd + \quad + \quad + \quad}{2} \div 2 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{2} \times \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} = \frac{ab + ad + bc + cd}{\underline{\quad}}$$

7.º ano

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por __

$$A = \frac{cd + \quad + \quad + \quad}{2} \div 2 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{2} \times \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} = \frac{ab + ad + bc + cd}{\underline{\quad}}$$

Como a é um fator comum a ab e a ad e c é um fator comum a bc e a cd,

$$A = \frac{a(b + d) + c(\quad + \quad)}{\underline{\quad}}$$

Como $(b + d)$ é um fator comum a a e a c,

$$A = \frac{(a + c)(\quad + \quad)}{\underline{\quad}} = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

8.º ano

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por __

$$A = \frac{cd + \quad + \quad + \quad}{2} \div 2 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{2} \times \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\quad}} = \frac{ab + ad + bc + cd}{\underline{\quad}}$$

Fatorizando,

$$A = \frac{a(\underline{\quad} + \underline{\quad}) + c(\underline{\quad} + \underline{\quad})}{\underline{\quad}} = \frac{(a + c)(\underline{\quad} + \underline{\quad})}{\underline{\quad}} = \frac{1}{\underline{\quad}}(\underline{\quad} + \underline{\quad})(\underline{\quad} + \underline{\quad})$$

9.º ano

Fatorizando,

$$A = \frac{a(\_\_+\_\_)+c(\_\_+\_\_)}{\_\_\_} = \frac{(a+c)(\_\_+\_\_)}{\_\_\_} = \frac{1}{\_\_\_}(\_\_+\_\_)(\_\_+\_\_)$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por __

$$A = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \div \_ = \frac{1}{2}(\_+\_)(\_+\_) \times \frac{\_\_}{\_} = \frac{\_\_}{\_}(\_+\_)(\_+\_)$$

Terá sido este o raciocínio utilizado pelos geómetras egípcios?

Esta tarefa foi realizada com o auxílio do *software GeoGebra* (Figura 5.73.), onde se segue a visualização da construção elaborada. Para a resolução da tarefa, e tendo por base as propriedades dos paralelogramos, os alunos manipulavam os seletores de modo a obterem o quadrilátero pretendido. Em simultâneo, é apresentada a classificação do quadrilátero bem como a fórmula convencional para o cálculo da sua área e o respetivo cálculo. Apresenta-se também a fórmula utilizada pelos egípcios e o cálculo aplicado ao quadrilátero selecionado.

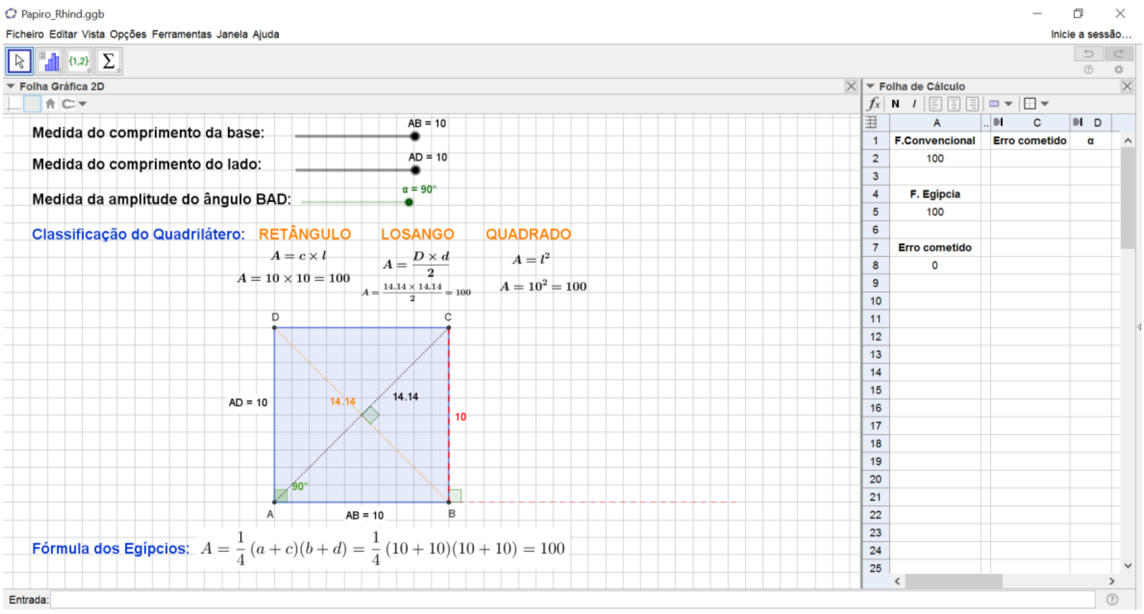


Figura 5.73.: Apresentação da tarefa Papiro de Rhind no *GeoGebra*, com a Folha de Cálculo,

A utilização do fundo quadriculado prendeu-se com o facto de ser mais fácil para os alunos a representação dos quadriláteros nas questões **1. a.** e **1. b.**. Embora a denominação dos paralelogramos surja automaticamente (sempre que deslocam os seletores) é necessário que os alunos conheçam as suas propriedades no que se refere às diagonais, aos ângulos internos e aos lados, conforme se pode ver a seguir:

- Paralelogramo no caso de possuir as medidas dos comprimentos dos lados iguais e a medida de amplitude do ângulo interno ser $90°$ - retângulo, losango e quadrado (Figura 5.74.).

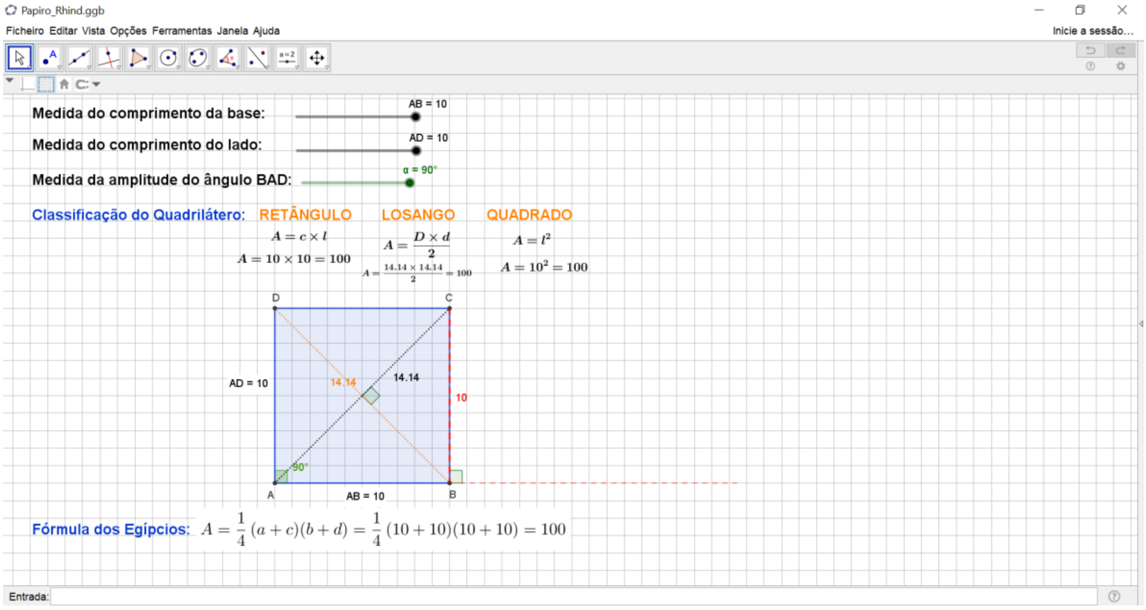


Figura 5.74.: Quadrado.

- Paralelogramo no caso de possuir duas medidas dos comprimentos dos lados diferentes e a medida de amplitude do ângulo interno ser $90°$ - retângulo (Figura 5.75.).

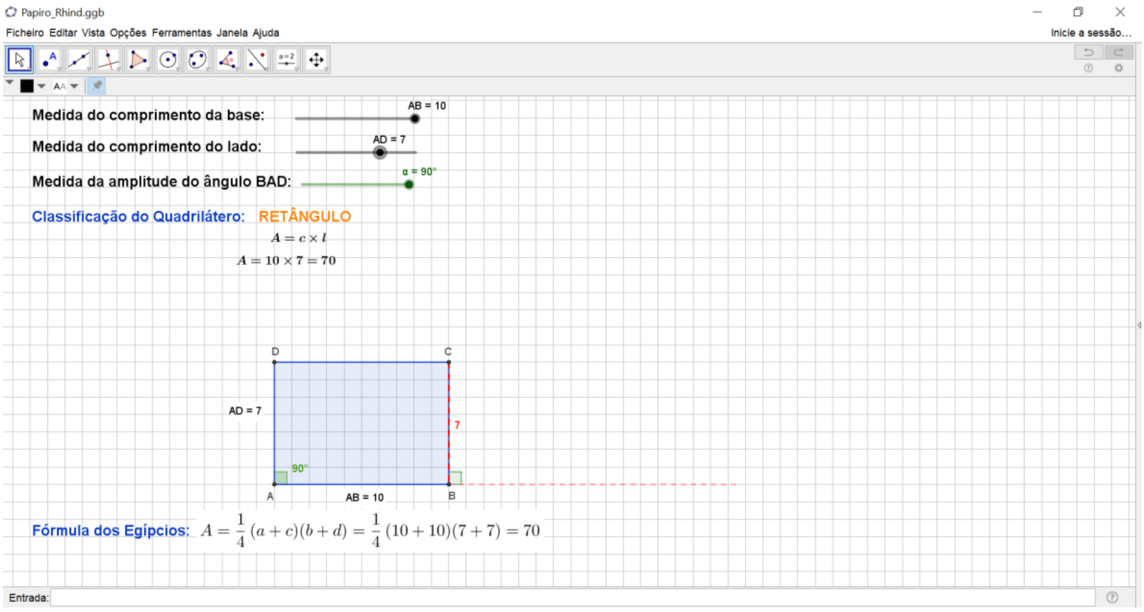


Figura 5.75.: Retângulo.

- Paralelogramo no caso de possuir duas medidas dos comprimentos dos lados diferentes e a medida de amplitude do ângulo interno ser inferior a $90°$ - paralelogramo não retângulo/obliquângulo (Figura 5.76.).

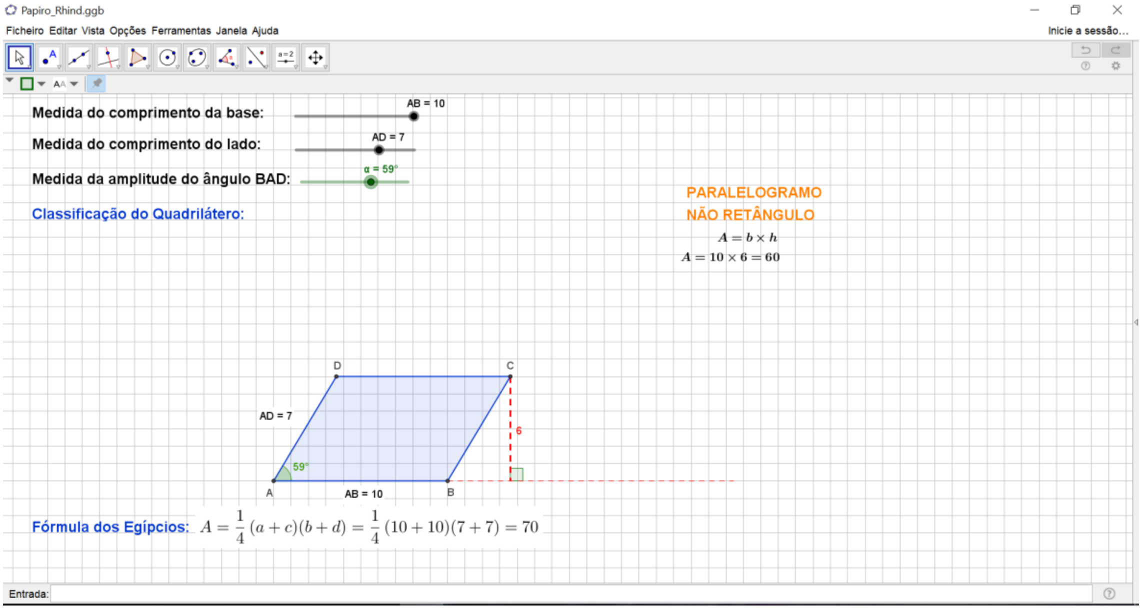


Figura 5.76.: Paralelogramo Não Retângulo.

- Paralelogramo no caso de possuir as medidas dos comprimentos dos lados iguais e a medida de amplitude do ângulo interno ser inferior a $90°$ - losango e paralelogramo não retângulo/obliquângulo (Figura 5.77.).

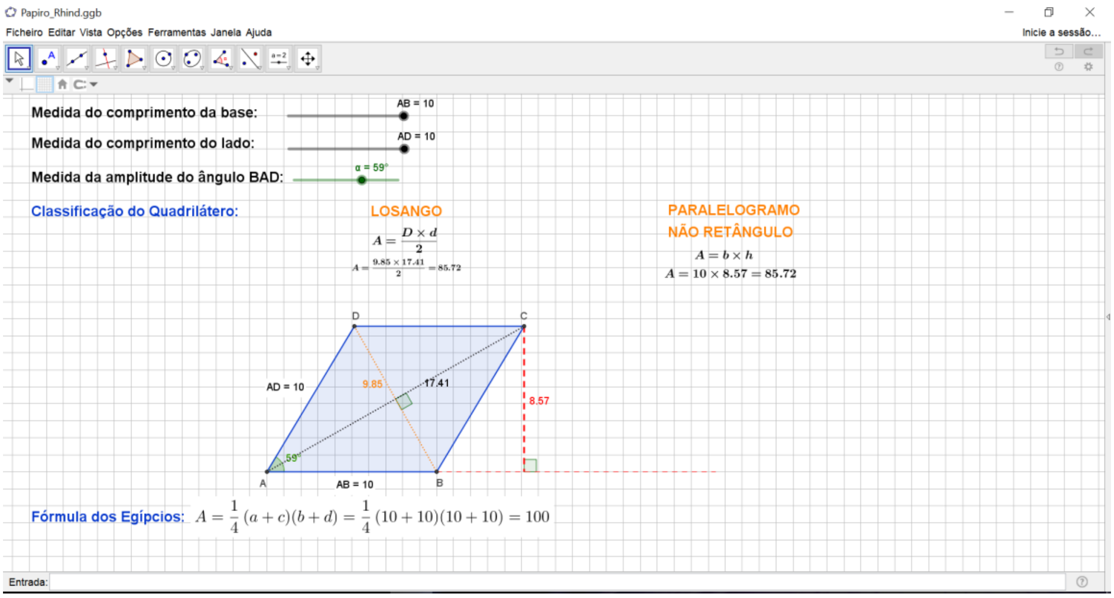
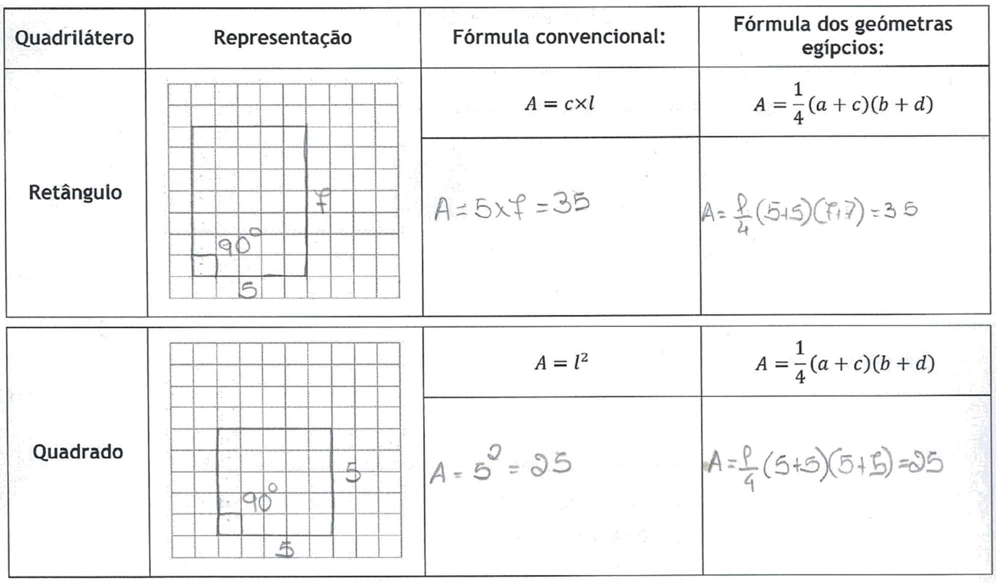


Figura 5.77.: Losango.

Após a concretização da Tarefa – Papiro de Rhind, foram analisadas as respostas apresentadas pelos alunos, seguindo-se alguns exemplos:

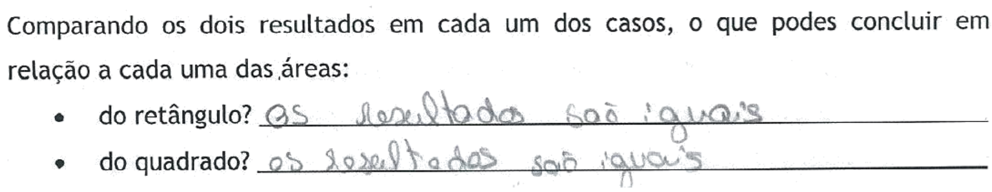
Questão	**Observação**
1. a.	Os alunos, após manipularem os seletores devidos, tinham de representar dois retângulos (considerando um retângulo e um quadrado) e de seguida calcular as suas áreas (Figura 5.78.).



Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Retângulo		$A = c \times l$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$
		$A = 5 \times 7 = 35$	$A = \frac{1}{4}(5+5)(7+7) = 35$
Quadrado		$A = l^2$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$
		$A = 5^2 = 25$	$A = \frac{1}{4}(5+5)(5+5) = 25$

Figura 5.78.: Resposta do aluno E15.

Após observação dos resultados obtidos, os alunos concluíram que as medidas das áreas de cada um dos retângulos eram iguais, quer fosse calculada pela fórmula convencional (a que hoje utilizamos) e pela fórmula utilizada pelos egípcios (Figura 5.79.).

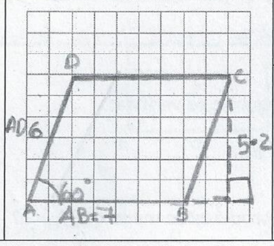


Comparando os dois resultados em cada um dos casos, o que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do retângulo? Os resultados são iguais
- do quadrado? os resultados são iguais

Figura 5.79.: Resposta do aluno E12.

1. b.	Esta questão é igual à anterior com exceção dos paralelogramos considerados, que neste caso seriam os paralelogramos não retângulos (paralelogramo obliquângulo e losango) (Figura 5.80.).

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Paralelogramo não Retângulo		$A = b \times h$ A=7×5,2= 36,37	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ A=1/4(7+7)(6+6)=42

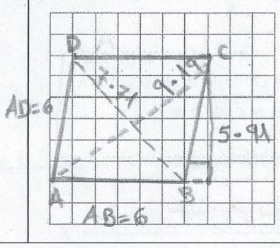
Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$ A= 7,71×9,19/2 = 35,45	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ A=1/4(6+6)(6+6)= 36

Figura 5.80.: Resposta do aluno E17.

Após observação dos resultados obtidos, os alunos concluíram que as medidas das áreas de cada um dos paralelogramos não retângulos não eram iguais nas fórmulas consideradas (fórmula convencional e fórmula utilizada pelos egípcios) (Figura 5.81.).

Compara os dois resultados em cada um dos casos. O que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do paralelogramo obliquângulo? Os resultados em cada área é diferente
- do losango? Os resultados em cada área é diferente.

Figura 5.81.: Resposta do aluno E17.

2. Alguns alunos foram capazes de concluir que não foram considerados todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos referindo, por exemplo, que a altura (no caso do paralelogramo não retângulo), as diagonais (no caso do losango) não foram tidos em consideração, os ângulos (Figuras 5.82. e 5.83.).

2. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

Não, pois não consideraram a altura no paralelogramo não retângulo e não consideraram as diagonais no losango. Mas no quadrado e no retângulo consideraram todas as medidas.

3. Desloca o seletor α para 90º

(Não, pois não consideraram a altura no paralelogramo não retângulo e não consideraram as diagonais no losango. Mas no quadrado e no retângulo consideraram todas as medidas)

Figura 5.82.: Resposta do aluno E17.

. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

A altura e os ângulos.

(A altura e os ângulos)

Figura 5.83.: Resposta do aluno E5.

6. Os alunos, com a Folha de Cálculo, puderam comparar as medidas das áreas de paralelogramos e verificar qual o erro cometido, tendo todos eles concluído que o erro cometido era 0 (zero) nos casos em que $\alpha = 90°$, ou seja, nos retângulos, e que o erro cometido era máximo nos casos em que $\alpha = 1°$ (valor mínimo que foi considerado na construção do seletor) (Figura 5.84.).

Qual a amplitude de α quando o **Erro Cometido** é:

- igual a zero? $\alpha =$ 90°
- máximo? $\alpha =$ 1°

Figura 5.84.: Resposta do aluno B13.

Assim os alunos concluíram que, à medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do Erro cometido aumenta (Figura 5.85.).

À medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do ***Erro cometido*** aumenta

Figura 5.85.: Resposta do aluno B13.

7. Nesta questão, os alunos são levados a pensar no que poderia ser substituído / considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para que passássemos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango). Esta questão foi desenvolvida de forma diferente para os 7.º/ 8.º anos e 9.º ano, uma vez que este último possui já conhecimentos que permitiam confirmar a resposta anterior, nomeadamente recorrendo à Trigonometria. Assim:

Nos 7.º/8.º anos (Figuras 5.86. e 5.87.):

O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

Poderia ser considerada a altura pois é válida para qualquer paralelogramo

(Poderia ser considerada a altura, pois é válida para qualquer paralelogramo)

Figura 5.86.: Resposta do aluno E5.

O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

o seu ângulo.

Figura 5.87: Resposta do aluno B13.

No 9.º ano (Figura 5.88.):

Como a e c são lados opostos do paralelogramo, logo, a = c assim como $b =$ d.

Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{4}(a + a)(b + b) = \frac{2a \times 2b}{4} = \frac{4ab}{4} = ab$$

$$\boxed{A = a \times b}$$

Determina uma expressão que te permita calcular a altura (h) do paralelogramo, utilizando as razões trigonométricas:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = \text{sen}\,\alpha \times b$$

Para a fórmula ser válida teríamos de ter

$$A = a \times h$$

Substituindo h pela expressão encontrada:

$$\boxed{A = a \times \text{sen}\,\alpha \times b}$$

Então, para termos uma fórmula válida para qualquer paralelogramo, teríamos de multiplicar a expressão $A = a \times b$ por sen α.

Figura 5.88.: Resposta do aluno B3.

8. Esta questão foi mais desenvolvida para os 7.º/8.º anos do que para o 9.º ano, dado que na questão **7.** os alunos do 9.º ano aplicaram conhecimentos que são lecionados neste ano de escolaridade. Assim:

Nos 7.º/8.º anos, os alunos tinham de mostrar que se verifica a igualdade $A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. Para isso, os alunos começaram por indicar em que paralelogramos a altura e os lados não perpendiculares a esta são iguais (Figura

5.89.), seguindo-se a respetiva demonstração, utilizando linguagem simbólica (Figura 5.90.).

No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$?
Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica? Quadrado
Retângulo

Figura 5.89.: Resposta do aluno E6.

$$A = \frac{1}{4}(a + a)(b + b) \Leftrightarrow A = \frac{1 \times 2a \times 2b}{4}$$
$$\Leftrightarrow A = \frac{4ab}{4} = 1ab$$

Figura 5.90.: Resposta do aluno E6.

No 9.º ano, foi proposto aos alunos que indicassem em que paralelogramos a altura e os lados não perpendiculares a esta são iguais (Figura 5.91.).

No retângulo e no quadrado.

Figura 5.91.: Resposta do aluno B7.

9. Nesta questão, os alunos dos três anos de escolaridade têm de mostrar que, para um quadrilátero convexo, $A \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$. Os alunos tiveram de trabalhar com desigualdades, embora as inequações apenas sejam lecionadas no 9.º ano e, mais uma vez, com linguagem simbólica (Figura 5.92.).

$$h \leq b \quad \xrightarrow{\times a} \quad \underbrace{a \times h}_{A} \leq a \times b$$
$$A \leq a \times b$$

Figura 5.92.: Resposta do aluno E14.

10. Os alunos tinham de pensar numa forma para chegar à fórmula inicialmente dada ($A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$). Assim, é sugerida uma possível explicação para tal, em que, mais uma vez, os alunos vão desenvolvendo o raciocínio, utilizando linguagem simbólica e conhecimentos anteriores, para chegar à fórmula que se pretende. Esta questão foi desenvolvida de forma ligeiramente diferente para o 7.º ano e 8.º/9.º anos.

No 7.º ano, uma parte da demonstração recorre à aplicação da propriedade distributiva (Figura 5.93.):

$A_1 = \frac{c \times d}{2}$ e $A_2 = \frac{a \times b}{2}$ | $A_3 = \frac{d \times a}{2}$ e $A_4 = \frac{c \times b}{2}$

$A_1 + A_2 = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2}$ | $A_3 + A_4 = \frac{da}{2} + \frac{cb}{2}$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{c \times d}{2} + \frac{a \times b}{2} + \frac{d \times a}{2} + \frac{c \times b}{2} = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{da}{2} + \frac{cb}{2}$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por 2

$$A = \frac{cd + ab + da + cb}{2} \div 2 = \frac{cd + ab + da + cb}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{ab + ad + bc + cd}{4}$$

Como a é um fator comum a ab e a ad e c é um fator comum a bc e a cd,

$$A = \frac{a(b + d) + c(b + d)}{2}$$

Como $(b + d)$ é um fator comum a a e a c,

$$A = \frac{(a + c)(b + d)}{4} = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

Figura 5.93.: Resposta do aluno E17.

Nos 8.º/9.º anos, recorreu-se aos conhecimentos que estes alunos possuem sobre Monómios e Polinómios, como a fatorização (Figura 5.94.):

$A_1 = \frac{c \times d}{2}$ e $A_2 = \frac{a \times b}{2}$ | $A_3 = \frac{d \times a}{2}$ e $A_4 = \frac{c \times b}{2}$

$A_1 + A_2 = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2}$ | $A_3 + A_4 = \frac{da}{2} + \frac{cb}{2}$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{da}{2} + \frac{cb}{2} = \frac{cd + ab + da + cb}{2}$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por 2

$$A = \frac{cd + ab + da + cb}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{cd + ab + da + cb}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{ab + ad + bc + cd}{4}$$

Fatorizando,

$$A = \frac{a(b + d) + c(b + d)}{4} = \frac{(a + c)(b + d)}{4} = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

Figura 5.94.: Resposta do aluno E21.

A atividade termina com uma questão aberta à imaginação dos alunos. As respostas escritas ficaram aquém do pretendido, tendo os alunos respondido que era uma possibilidade. No entanto, oralmente, os alunos questionaram se os geómetras egípcios faziam assim tantos cálculos para chegar à mesma conclusão que nós agora chegamos, de uma forma muito mais simples e rápida! Respondi-lhes que poderia não ser este o pensamento deles mas que tudo o que hoje conhecemos da Matemática, nomeadamente a simplicidade das fórmulas que hoje usamos, se deve, entre outros, a estes matemáticos.

5.3. Recolha dos Dados

Em todas as turmas, a análise quantitativa realizou-se com base na recolha de diversos elementos, como:

- argumentações dos alunos resultantes da realização das tarefas / Ficha de Trabalho desenvolvidas;
- notas de campo retiradas aquando da aplicação das tarefas;
- registos nas grelhas de observação durante a realização das tarefas;
- gravações áudio aquando da entrevista realizada com cada um dos alunos selecionados.

Foi aplicado também um questionário TIC (Anexo B – Questionário TIC (Alunos)), um Teste Diagnóstico de Geometria, segundo van Hiele (Anexo A – Teste Diagnóstico de Geometria). Relativamente à docente/investigadora, o seu papel foi o de mediadora/observadora com observações pontuais (essencialmente ao nível da utilização do *software*).

5.4. Análise e Interpretação dos Dados

O **questionário TIC** aplicado aos alunos, incidiu sobre uma breve caracterização dos participantes na investigação (Parte I); a disponibilidade e utilização, quer em casa quer na escola, e os seus conhecimentos de TIC (Parte II) e conhecimento e utilização do SGD *GeoGebra* (Parte III). Assim, foi possível realizar-se uma caracterização destes alunos neste nível, tendo eles respondido a questões como as que constam das tabelas seguintes (Tabelas 5.1., 5.2., 5.3. e 5.4.):

Tabela 5.1.: Dados do Aluno (Parte I) dos alunos das turmas envolvidas na investigação.

Número da Questão	Questão
1.1.	A que turma pertences?
1.2.	Género
1.3.	Que idade tens?
1.4.	Nível obtido a Matemática no 1.º Período

Tabela 5.2.: Disponibilidade e utilização das TIC (Parte II) dos alunos.

Número da Questão	Questão
2.1.	Dos seguintes dispositivos (equipamentos) qual(is) tens disponível(is) para utilizar em casa?
2.2.	Dos seguintes dispositivos (equipamentos) qual(is) tens disponível(is) para utilização na escola?
5.1.	Durante a semana, quanto tempo é dedicado à utilização do computador numa aula de:
5.2.	Em tempo de aulas, quanto tempo usas o computador na escola (fora da sala de aula) em tarefas de apoio ao estudo / realização do trabalho de casa, por semana?

Tabela 5.3.: Conhecimentos de TIC (Parte II) dos alunos.

Número da Questão	Questão
4.1.	Com que frequência utilizas, em casa, as TIC para:
6.1.	Sobre a tua experiência com computadores: indica o grau de concordância para cada afirmação.

Tabela 5.4.: Conhecimento e utilização do SGD *GeoGebra* (Parte III) dos alunos.

Número da Questão	Questão
7.1.	Dos seguintes *softwares* de Geometria Dinâmica, assinala o(s) que conheces?
7.2.	Em que situação(ões) utilizaste o(s) *software(s)* anteriores?
8.1.	Com a utilização do *software GeoGebra*:
8.2.	Sentiste dificuldades na utilização do *software GeoGebra*?
8.3.	Quais as vantagens da utilização do *software GeoGebra* no ensino da Matemática?
8.4.	A utilização do *software GeoGebra*: a. facilitou-te a realização das tarefas desenvolvidas na sala de aula? b. contribuiu/contribui para a melhoria das tuas aprendizagens e compreensão dos conteúdos lecionados?

Após a análise dos resultados, foi possível concluir que, nas turmas do 7.º ano:

Parte II

- a maior parte dos alunos (67%) não utiliza as TIC disponibilizadas na escola (fora da sala de aula), o que vai ao encontro do estudo realizado pela *Organisation for Economic Co-Operation and Development* (OECD, 2012);
- todos os alunos, com exceção de um, possuem computador de secretária/portátil ou *tablet* para utilizar em casa;
- apenas dois alunos não possuem ligação à *Internet*, sendo que um deles não possui computador de secretária/portátil ou *tablet* para utilizar em casa;
- relativamente ao tempo dedicado à utilização do computador numa aula, no mínimo, até 30 minutos por semana, a disciplina de Matemática (100% dos alunos) é a que reúne mais votos, seguindo-se Física e Química (93% dos alunos) e Ciências Naturais (73% dos alunos);
- os conhecimentos de TIC que os alunos possuem, permitem que os utilizem, em casa, pelo menos uma vez por mês, para:
    - jogar jogos, 90 % dos alunos (metade dos alunos fazem-no todos ou quase todos os dias);
    - realizar os trabalhos de casa, 63% dos alunos (19 dos 30);
    - comunicar com os colegas, por correio eletrónico, sobre os trabalhos de casa, 40 % dos alunos (12 dos 30);
    - comunicar com os professores e submeter trabalhos de casa ou outros trabalhos da escola, por correio eletrónico, 20 % dos alunos (6 dos 30);
    - fazer o *download* e *upload* de material sugerido/enviado pelos professores, 40% dos alunos (12 dos 30);
    - procurar na página da escola por informações, 40% dos alunos (12 dos 30);
    - utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com outros colegas, 87% dos alunos (26 dos 30);
    - utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com os professores, 20% dos alunos (6 dos 30);
    - ver o correio eletrónico, 53% dos alunos (16 dos 30);
    - conversar *online* (*Chat*), todos os alunos;
    - navegar na *Internet*, todos os alunos (e, pelo menos, uma vez por semana);

    - efetuar o *download* de músicas, filmes, jogos ou programas da *Internet*, 87% dos alunos (26 dos 30);
    - publicar em Redes Sociais (por exemplo, *Facebook*), 73% dos alunos (22 dos 30);
- sobre a sua experiência com computadores, os alunos "concordam" / "concordam totalmente" que:
    - é muito importante trabalhar com um computador, 97%;
    - é divertido jogar com computadores, 97%;
    - é divertido trabalhar com computadores, 90%;
    - utilizam o computador porque está muito interessado, 83%;
    - quando trabalham com o computador entusiasmam-se e perdem a noção do tempo, 67%.

Parte III

- o SGD que mais alunos conhecem é o *GeoGebra*, 97%, sendo que apenas um aluno não conhece qualquer tipo de *software* desta natureza;
- a utilização do GeoGebra foi feita na escola, segundo 73%, seguindo-se em casa com 15%. Apenas 2 alunos (6%) nunca utilizaram o *GeoGebra*. De referir que os alunos consideraram "utilização" como sendo visualização em sala de aula, uma vez que, e como se poderá verificar na análise feita às entrevistas realizadas, a maior parte deles apenas utilizou/manipulou o *GeoGebra* durante a realização das tarefas.
- com a utilização do GeoGebra, os alunos consideraram "concordam" / "concordam totalmente" que:
    - se sentem mais motivados para aprenderem sozinhos, 50%;
    - melhoram o seu desempenho escolar, 60%;
    - sentem que estão mais atentos, 70%;
    - aumenta o seu interesse pela disciplina, 67%;
    - envolvem-se mais nas tarefas propostas, 83%;
    - ficam mais confiantes perante a aprendizagem, 90%;
    - tomam decisões mais facilmente, 90%;
    - sentem mais autonomia na aprendizagem, 90%;

    - têm mais confiança nas suas capacidades, 93%;
    - gostam de colocar questões, 80%;
    - têm mais facilidade na interpretação dos conceitos, 90%;
    - esforçam-se por realizar melhor os trabalhos propostos na aula, 83%;
    - realizam os trabalhos propostos com mais prazer, 90%;
- nenhum aluno sentiu dificuldades na utilização do *GeoGebra* aquando da realização das tarefas;
- quanto às vantagens da utilização do *GeoGebra* no ensino da Matemática, os alunos referiram que:
    - aprende-se melhor;
    - facilitou a sua aprendizagem e percebe-se melhor pois observa-se melhor e pode-se mexer, ...;
    - ajudou a entender melhor a matéria;
    - é divertido;
    - ficam a perceber melhor e aprendem mais;
    - é mais apelativo;
    - as aulas são mais divertidas;
- segundo os alunos, a utilização do *GeoGebra*:
    - facilitou a realização das tarefas desenvolvidas na sala de aula pois: foi mais divertido, ajudou a perceber melhor e a prestar melhor atenção e sugerem que se faça mais vezes.
    - contribuiu/contribui para a melhoria das suas aprendizagens e compreensão dos conteúdos lecionados, pois consideram que é muito mais fácil de aprender; estão mais atentos e ansiosos por aprender e de perceber a matéria.

Já na turma 8.º C, foi possível concluir que:

Parte II

- a maior parte dos alunos (44%) não utiliza as TIC disponibilizadas na escola (fora da sala de aula), o que vai ao encontro do estudo realizado pela *Organisation for Economic Co-Operation and Development* (OECD, 2012);

- todos os alunos, com exceção de um, possuem computador de secretária/portátil ou *tablet* e ligação á *Internet* para utilizar em casa;
- relativamente ao tempo dedicado à utilização do computador numa aula, no mínimo, até 30 minutos por semana, a disciplina de Física e Química (61% dos alunos) é a que reúne mais votos, seguindo-se Matemática (56% dos alunos) e Língua Estrangeira (50% dos alunos);
- os conhecimentos de TIC que os alunos possuem, permitem que os utilizem, em casa, pelo menos uma vez por mês, para:
  - jogar jogos, 94 % dos alunos (17 dos 18 alunos);
  - realizar os trabalhos de casa, 89% dos alunos (16 dos 18);
  - comunicar com os colegas, por correio eletrónico, sobre os trabalhos de casa, 83 % dos alunos (15 dos 18);
  - comunicar com os professores e submeter trabalhos de casa ou outros trabalhos da escola, por correio eletrónico, 61 % dos alunos (11 dos 18);
  - fazer o *download* e *upload* de material sugerido/enviado pelos professores, 78% dos alunos (14 dos 18);
  - procurar na página da escola por informações, 28% dos alunos (5 dos 18);
  - todos os alunos utilizam as Redes Sociais para partilhar informações com outros colegas;
  - utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com os professores, 44% dos alunos (8 dos 18);
  - publicar na página da turma, 11% (2 dos 18);
  - ver o correio eletrónico, 83% dos alunos (15 dos 18);
  - conversar *online* (*Chat*), 89% (16 dos 18);
  - navegar na *Internet*, todos os alunos;
  - efetuar o *download* de músicas, filmes, jogos ou programas da *Internet*, 89% dos alunos (16 dos 18);
  - publicar em Redes Sociais (por exemplo, *Facebook*), 83% dos alunos (15 dos 18).
- sobre a sua experiência com computadores, os alunos “concordam” / “concordam totalmente” que:
  - é muito importante trabalhar com um computador, todos os alunos;

- é divertido jogar com computadores, todos os alunos;
- é divertido trabalhar com computadores, 94%;
- utilizam o computador porque está muito interessado, 56%;
- quando trabalham com o computador entusiasmam-se e perdem a noção do tempo, 72%.

Parte III

- todos os alunos conhecem SGD *GeoGebra* e um aluno conhece também os *softwares Cinderella* e *C.a.R.*;
- a utilização do *GeoGebra* foi feita na escola, segundo 83% dos alunos, ou seja, 15 dos 18, seguindo-se em casa ou em casa de um colega com 6% (1 dos 18). Apenas 1 aluno (6%) nunca utilizou o *GeoGebra*. De referir que, tal como os alunos das turmas do 7.º ano, estes alunos consideraram "utilização" como sendo visualização em sala de aula, uma vez que, e como se poderá verificar na análise feita às entrevistas realizadas, a maior parte deles apenas utilizou/manipulou o *GeoGebra* durante a realização das tarefas;
- com a utilização do *GeoGebra*, os alunos consideraram "concordam" / "concordam totalmente" que:
  - se sentem mais motivados para aprenderem sozinhos, 39%;
  - melhoram o seu desempenho escolar, 61%;
  - sentem que estão mais atentos, 50%;
  - aumenta o seu interesse pela disciplina, 56%;
  - envolvem-se mais nas tarefas propostas, 50%;
  - ficam mais confiantes perante a aprendizagem, 50%;
  - tomam decisões mais facilmente, 39%;
  - sentem mais autonomia na aprendizagem, 33%;
  - têm mais confiança nas suas capacidades, 28%;
  - gostam de colocar questões, 33%;
  - têm mais facilidade na interpretação dos conceitos, 72%;
  - esforçam-se por realizar melhor os trabalhos propostos na aula, 44%;
  - realizam os trabalhos propostos com mais prazer, 56%;

    - o seu interesse não se altera, 6% (1 dos 18 alunos);
- apenas um aluno sentiu dificuldades na utilização do *GeoGebra* aquando da realização das tarefas, considerando que "algumas ferramentas do *software* são de difícil acesso";
- quanto às vantagens da utilização do *GeoGebra* no ensino da Matemática, os alunos referiram que:
    - aprendem mais e melhor Matemática;
    - estão mais atentos e motivados para aprender;
    - o cálculo é feito automaticamente, facilita a aprendizagem é mais divertida "aprendizagem";
    - existem bastantes ferramentas úteis;
    - é possível observar com mais facilidade as possibilidades;
    - as aulas tornam-se mais construtivas, fáceis, explicativas e é mais fácil de aprender conceitos;
    - poupa trabalho pois não é preciso fazer cálculos nem fazer construções;
    - é mais económico pois não gastam folhas;
    - é uma maneira de ensinar mais divertida de aprender e fixam melhor a informação;
- segundo os alunos, a utilização do *GeoGebra*:
    - facilitou a realização das tarefas desenvolvidas na sala de aula pois: estão mais atentos; compreendem melhor as figuras geométricas; podem personalizar o exercício à sua escolha e fornece informação mais detalhada; os cálculos ao já aparecerem resolvidos o que tornou a realização da tarefa mais fácil; não foi necessário recorrer à calculadora e a outros materiais; existia tanta explicação e não eram necessários tantos cálculos;
    - contribuiu/contribui para a melhoria das suas aprendizagens e compreensão dos conteúdos lecionados, pois consideram que estão mais atentos; compreendem melhor a Matemática visualmente; mostra detalhadamente o comprimento dos lados, área, etc.; ajuda bastante a compreender os conteúdos; virtualmente aprendo melhor pois chama mais a atenção; aprendem com mais rapidez.

Quanto à turma 9.º B, foi possível concluir que:

Parte II

- a maior parte dos alunos (63%) não utiliza as TIC disponibilizadas na escola (fora da sala de aula), o que vai ao encontro do estudo realizado pela *Organisation for Economic Co-Operation and Development* (OECD, 2012);
- todos os alunos possuem computador de secretária/portátil e ligação á *Internet* para utilizar em casa;
- relativamente ao tempo dedicado à utilização do computador numa aula, no mínimo, até 30 minutos por semana, a disciplina de Português e Matemática (44% dos alunos) são as que, igualmente, reúnem mais votos, seguindo-se Língua Estrangeira (38% dos alunos);
- os conhecimentos de TIC que os alunos possuem, permitem que os utilizem, em casa, pelo menos uma vez por mês, para:
  - jogar jogos, 69 % dos alunos (11 dos 16 alunos);
  - realizar os trabalhos de casa, 75% dos alunos (12 dos 16);
  - comunicar com os colegas, por correio eletrónico, sobre os trabalhos de casa, 56 % dos alunos (9 dos 16);
  - comunicar com os professores e submeter trabalhos de casa ou outros trabalhos da escola, por correio eletrónico, 56 % dos alunos (9 dos 16);
  - fazer o *download* e *upload* de material sugerido/enviado pelos professores, 63% dos alunos (10 dos 16);
  - procurar na página da escola por informações, 19% dos alunos (3 dos 16);
  - utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com outros colegas, 75% dos alunos (12 dos 16), sendo que estes fazem-no pelo menos 1 vez por semana;
  - utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com os professores, 19% dos alunos (3 dos 16);
  - ver o correio eletrónico, 81% dos alunos (13 dos 16);
  - conversar *online* (*Chat*), 88% (14 dos 16);
  - navegar na *Internet*, 88% (14 dos 16);
  - efetuar o *download* de músicas, filmes, jogos ou programas da *Internet*, 94% dos alunos (15 dos 16);

  - publicar em Redes Sociais (por exemplo, *Facebook*), 75% dos alunos (12 dos 16).
- sobre a sua experiência com computadores, os alunos "concordam" / "concordam totalmente" que:
  - é muito importante trabalhar com um computador, todos os alunos;
  - é divertido jogar com computadores, 75%;
  - é divertido trabalhar com computadores, 88%;
  - utilizam o computador porque está muito interessado, 88%;
  - quando trabalham com o computador entusiasmam-se e perdem a noção do tempo, 75%.

Parte III

- todos os alunos conhecem o SGD *GeoGebra*, à exceção de um aluno que não conhece nenhum *software* desta natureza;
- a utilização do *GeoGebra* foi feita na escola, segundo 94% dos alunos, ou seja, 15 dos 16. No entanto, 2 destes alunos já o utilizaram em casa (o que corresponde a 13%) e 1 deles em casa de um colega com 6% (1 dos 16). Apenas 1 aluno (6%) nunca utilizou o *GeoGebra*, ou seja, o mesmo aluno que não conhece o *software*. De referir que, tal como os alunos das turmas do 7.º ano, estes alunos consideraram "utilização" como sendo visualização em sala de aula, uma vez que, e como se poderá verificar na análise feita às entrevistas realizadas, a maior parte deles apenas utilizou/manipulou o *GeoGebra* durante a realização das tarefas;
- com a utilização do *GeoGebra*, os alunos consideraram "concordam" / "concordam totalmente" que:
  - se sentem mais motivados para aprenderem sozinhos, 25%;
  - melhoram o seu desempenho escolar, 50%;
  - sentem que estão mais atentos, 44%;
  - aumenta o seu interesse pela disciplina, 44%;
  - envolvem-se mais nas tarefas propostas, 38%;
  - ficam mais confiantes perante a aprendizagem, 50%;
  - tomam decisões mais facilmente, 56%;

  - sentem mais autonomia na aprendizagem, 50%;
  - têm mais confiança nas suas capacidades, 56%;
  - gostam de colocar questões, 56%;
  - têm mais facilidade na interpretação dos conceitos, 50%;
  - esforçam-se por realizar melhor os trabalhos propostos na aula, 56%;
  - realizam os trabalhos propostos com mais prazer, 56%;
- apenas um aluno sentiu dificuldades na utilização do *GeoGebra* aquando da realização das tarefas, considerando que o *software* apresenta "muita ferramenta e muitos utensílios por isso baralha um pouco";
- quanto às vantagens da utilização do *GeoGebra* no ensino da Matemática, os alunos referiram que:
  - ajuda a realizar as tarefas no computador;
  - ensina muitas coisas relacionadas com a Matemática e Geometria;
  - é de fácil utilização e autonomia;
  - ajuda nos cálculos;
  - conseguem tirar conclusões mais rápido pois a Matemática neste software não é estática;
  - aprende-se de uma forma mais divertida;
  - ajuda a compreender melhor a matéria;
  - facilita no movimento dos ângulos, etc., e obtêm resultados mais rapidamente;
  - torna a aprendizagem mais interessante e é mais fácil entender;
  - há maior facilidade e utilidade no trabalho.
- todos os alunos são da opinião de que a utilização do *GeoGebra*:
  - facilitou a realização das tarefas desenvolvidas na sala de aula;
  - contribuiu/contribui para a melhoria das suas aprendizagens e compreensão dos conteúdos lecionados.

O **Teste Diagnóstico em Geometria**, com o objetivo de determinar o nível de raciocínio geométrico segundo van Hiele dos 65 alunos, entre o 7.º e 9.º anos, foi realizado um Teste Diagnóstico para avaliar as suas competências em Geometria. Os alunos realizaram apenas um teste. Nas tabelas seguintes (Tabelas 5.5. e 5.6.) podemos observar, respetivamente e por turma, o sucesso obtido em cada questão do Teste Diagnóstico e em cada nível de van Hiele.

Tabela 5.5.: Sucesso obtido pelos alunos em cada questão do Teste Diagnóstico em Geometria.

		Turma					
	Questão	7.º B (13 alunos)	7.º E (17 alunos)	7.º Ano (30 alunos)	8.º C (19 alunos)	9.º B (16 alunos)	**TOTAL** (65 alunos)
Nível 1	1.	62%	47%	53%	100%	81%	74%
	2.	62%	94%	80%	84%	81%	82%
	3.	92%	88%	90%	95%	94%	92%
	4.	38%	29%	33%	53%	44%	42%
	5.	15%	35%	27%	11%	63%	31%
Nível 2	6.	23%	47%	37%	58%	63%	49%
	7.	46%	47%	47%	47%	63%	51%
	8.	46%	71%	60%	42%	38%	49%
	9.	69%	82%	77%	84%	56%	74%
Nível 3	10.	23%	29%	27%	32%	56%	35%
	11.	62%	88%	77%	79%	69%	75%
	12.	0%	12%	7%	11%	13%	9%
	13.	15%	35%	27%	16%	19%	22%
Média		41%	54%	48%	55%	57%	52%

Tabela 5.6.: Sucesso obtido pelos alunos em cada nível de van Hiele.

	Turma					
	7.º B (13 alunos)	7.º E (17 alunos)	7.º Ano (30 alunos)	8.º C (19 alunos)	9.º B (16 alunos)	**TOTAL** (65 alunos)
Nível 1	54%	59%	57%	89%	88%	74%
Nível 2	15%	53%	37%	37%	38%	37%
Nível 3	0%	29%	17%	16%	6%	14%
Média	41%	54%	48%	55%	57%	52%

Podemos concluir que a maioria dos alunos situa-se no Nível 1 e, torna-se curioso observar que, a turma que respondeu corretamente a mais de duas questões nos níveis 2 e 3 foi o 7.º E. Uma possível explicação para esta situação poderá ser o facto de os alunos do 7.º ano terem estudado recentemente as propriedades dos triângulos e dos quadriláteros, embora os resultados na turma 7.º B não sejam semelhantes.

Na tabela seguinte (Tabela 5.7.), apresenta-se o sucesso obtido pelos alunos participantes na investigação, em cada nível de van Hiele.

Tabela 5.7.: Sucesso obtido pelos alunos em cada nível de van Hiele.

		Turma					
	Questão	7.º B (13 alunos)	7.º E (17 alunos)	7.º Ano (30 alunos)	8.º C (19 alunos)	9.º B (16 alunos)	**TOTAL** (65 alunos)
Nível 1	0	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	1	8%	6%	7%	0%	0%	2%
	2	38%	35%	37%	11%	31%	29%
	3	38%	29%	33%	37%	31%	34%
	4	8%	18%	13%	47%	38%	28%
	5	8%	12%	10%	5%	19%	11%
Nível 2	0	0%	6%	3%	5%	13%	6%
	1	38%	12%	23%	16%	13%	20%
	2	46%	29%	37%	42%	38%	39%
	3	15%	35%	27%	16%	19%	
	4	0%	18%	10%	21%	19%	
Nível 3	0	31%	12%	20%	11%	6%	
	1	38%	41%	40%	58%	38%	
	2	31%	18%	23%	16%	50%	
	3	0%	29%	17%	16%	6%	
	4	0%	0%	0%	0%	0%	

Para avaliar o nível de van Hiele em que cada aluno se encontrava, utilizou-se o seguinte critério: o aluno está num determinado nível se tiver acertado em, pelo menos 50% das questões consideradas para esse nível e não tiver acertado em 50% ou mais das questões dos níveis seguintes. Os dados recolhidos destes testes foram analisados quantitativamente, com o programa Microsoft Excel 2016 e qualitativamente, com base nos descritores de Diaz & Espinoza (2013).

Na tabela seguinte (Tabela 5.8.) pode-se concluir que:

- na turma 7.º B, 54% dos alunos posicionam-se entre os Níveis 1 e 2 e quatro alunos atingem o Nível 3, correspondendo a 31%; dois alunos não atingem o Nível 1 sendo que um deles é aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE);
- na turma 7.º E, 41% dos alunos posicionam-se no Nível 2 e 47% posiciona-se no Nível 3; dois alunos não atingem o Nível 1 sendo que um deles é aluno com NEE. Tal como havia sido referido anteriormente, e através dos resultados obtidos com o este teste, estas duas turmas apresentam características bastante heterogéneas, neste caso, ao nível dos conhecimentos em Geometria;
- na turma 8.º C, 74% dos alunos posicionam-se entre os níveis 1 e 2 e 26% posiciona-se no Nível 3. De referir que este Teste Diagnóstico foi aplicado a 19 dos 20 alunos da

turma, ou seja, um dos alunos apenas participou na 1.ª Fase da investigação e outro só participou até à 2.ª Fase;

– na turma 9.º B, conclui-se que 38% dos alunos posiciona-se entre os Níveis 1 e 2, enquanto que 56% se posiciona no Nível 3; apenas um aluno não atinge o Nível 1.

Tabela 5.8.: Análise do Nível de van Hiele em que os alunos se encontram.

Turma	Contexto					
	Nível 1		Nível 2		Nível 3	
7.º B (13 alunos)	2	15%	5	38%	4	31%
7.º E (17 alunos)	0	0%	7	41%	8	47%
7.º Ano (30 alunos)	2	7%	12	40%	12	40%
8.º C (19 alunos)	4	21%	10	53%	5	26%
9.º B (16 alunos)	2	13%	4	21%	9	56%
TOTAL (65 alunos)	**8**	**12%**	**26**	**40%**	**26**	**40%**

A **Grelha de Observação** (Anexo G – Grelha de Observação e Anexo H – Grelha de Observação 9.º ano, Parte I) foi outro recurso utilizado na recolha de dados. Assim, foi preenchida em cada turma uma grelha de observação, com o registo do desempenho de alguns alunos, num total de 24 alunos, aquando da realização das tarefas em ambas as partes, podendo-se concluir que:

– todos os alunos (100%) estavam motivados para a realização das tarefas;
– de todos estes alunos, 14 (58%) não apresentaram dificuldades de interpretação durante as tarefas. As dificuldades apresentadas pelos restantes alunos (10 – 42%), manifestaram-se ao nível da Comunicação Matemática, aquando das conclusões das tarefas (3 alunos do 7.º ano e 2 alunos do 8.º C), e em algumas questões da Tarefa Papiro de Rhind, nomeadamente, as questões 2, 3, 6, 8, 9 e 10;
– apenas 1 aluno, do 8.º C (4%), apresentou dificuldades ao nível da autonomia na realização das tarefas, sendo necessária a ajuda do colega ou da professora;
– todos os alunos (100%) conseguiram tirar conclusões a partir da visualização da tarefa no *GeoGebra*;
– a folha de cálculo foi uma mais valia para todos os alunos (100%), principalmente na questão **6.** da Tarefa Papiro de Rhind, e não foi motivo de distração para os alunos;
– quanto à utilização do *GeoGebra*, considero que 18 alunos (75%) não apresentaram dificuldades no seu domínio e os 6 alunos (25%) que tiveram dificuldades,

apresentaram-nas apenas no início da sua utilização, já que era a primeira vez que manipulavam o mesmo;

- todos os alunos (100%) interagiram positivamente com o *software*.

Relativamente aos restantes alunos de todas as turmas:

- mostraram-se motivados, comparativamente a outras atividades;
- alguns apresentaram dificuldades na interpretação das questões presentes nas tarefas;
- alguns deles apresentaram pouca autonomia, principalmente os alunos da turma 7.º B;
- conseguiram tirar conclusões que sem a visualização a maioria teria dificuldade ou não conseguiria.

No geral, pode-se concluir que a atividade no seu todo revelou-se uma mais valia; os alunos, na sua maioria, mostraram-se empenhados e colaborantes.

A **Entrevista** (Anexo I – Guião da Entrevista) marca a última fase da investigação. Foram selecionados alguns alunos aleatoriamente, dentro do seu perfil, de cada turma e entrevistados individualmente relativamente a:

- conceções sobre a Matemática;
- atitudes face à Matemática e às aulas de Matemática;
- atitudes face à utilização do *software GeoGebra* nas aulas de Matemática;
- como correu a experiência;
- motivação para a disciplina.

Assim, e de uma forma geral, os alunos consideram que:

- a Matemática é importante para o futuro, ou seja, para obterem uma profissão e utilizá-la nesse campo;
- podem ser eles próprios a descobrirem coisas em Matemática;
- é importante estudar Matemática, principalmente para obtenção de uma profissão;
- são alunos médios na disciplina;
- costumam estudar fora das aulas, a maioria, resolvendo exercícios do manual e/ou do caderno de atividades e há quem vá buscar à *Internet*, e grande parte precisa de ajuda para realizar esse estudo;
- o mais importante nesta disciplina é a concentração e a interpretação dos problemas é a base de tudo;

- quando têm dificuldades procuram a ajuda do professor;
- o que mais gostam de fazer é resolver exercícios e o que menos gostam é de fazer o trabalho de casa;
- as tarefas que privilegiam são as investigações e os jogos pois são formas divertidas de aprender;
- uma boa aula é aquela em que aprendem de uma forma divertida, através de, por exemplo, jogos e utilizando os computadores;
- se fossem professores seriam rigorosos, não recorreriam tanto aos manuais e fariam aulas mais práticas;
- quanto às atitudes face à utilização do *software GeoGebra* nas aulas de Matemática, as perguntas e respostas dos alunos apresentam-se na tabela seguinte (Tabela 5.9.):

Tabela 5.9.: Parte da entrevista com questões sobre o *GeoGebra*.

Pergunta	Sim	Não
Achas que trabalhar com o *software GeoGebra* é interessante?	100%	0%
Achas que trabalhar com o *software GeoGebra* é útil?	100%	0%
Preferes aulas com ou sem recurso ao *GeoGebra*?	100%	0%
Se puderes, vais utilizar com o *software GeoGebra* novamente?	100%	0%

- a experiência foi interessante, principalmente por conhecerem como faziam os nossos antepassados no cálculo das áreas de quadriláteros convexos; ser novidade e divertida pela utilização do *GeoGebra*, tendo seguido as orientações da Ficha de Trabalho e por obterem resultados mais fácil e rapidamente; na resolução da tarefa, procuraram não deixar perguntas por fazer por forma a terem um fio condutor que permitisse tirar as conclusões pretendidas;
- o mais motivador foi, sem dúvida, trabalhar com os computadores; aprender a matéria de uma forma mais divertida; utilizar o *GeoGebra*, o qual consideraram fácil de utilizar; serem os próprios a manipular o *software*, aprendendo autonomamente, por permitir, não sendo estático, observar várias opções e obter resultados mais fácil e rapidamente; e aprender como os egípcios calculavam áreas. De referir que alguns alunos consideraram a questão **10.** da tarefa Papiro de Rhind motivadora pois permitiu estarem na "pele" e de pensar como um geómetra para chegar à fórmula matemática que eles utilizavam;

- o mais positivo na realização da experiência foi a forma divertida como aprenderam os conteúdos e que o *GeoGebra* lhes permitiu tirar conclusões mais rapidamente, tendo sido uma ferramenta altamente motivadora para aprender;
- sentiram, no geral, mais dificuldades nas conclusões e nas questões:
  - **7.º ano**: critério LLL - questão **6.**; critério AA – questão **6.**; critério LAL – questão **3.**; Papiro de Rhind – **1.** (devido à construção, no papel, dos quadriláteros) e questões **8.**, **9.** e **10.** – de referir que estas questões pressupõem trabalhar com expressões algébricas que, em turmas do 7.º ano, é natural que apresentem dificuldades por ser um conteúdo abordado apenas neste ano letivo;
  - **8.º ano**: houve um aluno que referiu ter tido dificuldades na Tarefa 3 – questão **4.** devido aos critérios de semelhança de triângulos, e nas questões **5.** e **6.**; na tarefa Papiro de Rhind – questões **4.**, **7.**, **8.** e **9.**;
  - **9.º ano**: apenas apresentaram dificuldades na tarefa Papiro de Rhind – questões **2.**, **8.**, **9.** e **10.**;
- todos os alunos entrevistados consideraram importante que as tarefas aplicadas possam estar disponíveis na *Internet* para utilização futura;
- uma aula de Matemática deveria ter mais jogos sobre a matéria, trabalhar mais com os computadores e com o *GeoGebra*, ou seja, utilizar mais as novas tecnologias de forma a se sentirem motivados pela disciplina. De referir que, nas turmas 7.º B, 7.º E e 8.º C, a utilização do computador e do *GeoGebra* é feita com mais frequência este ano letivo.

Foi aplicado um questionário sobre os **Conhecimentos de TIC** dos professores de Matemática do 3.º ciclo (Anexo J – Questionário TIC (Professores)), da Escola Secundária de Campo Maior. Este questionário teve como objetivo de conhecer a sua opinião sobre a experiência que têm na utilização das TIC, em especial, do software *GeoGebra*.

Este questionário TIC (Professores), foi dividido em três partes: dados do professor (Parte I); Tecnologias de Informação e Comunicação (Parte II) e, a última parte, sobre o conhecimento e a utilização do SGD *GeoGebra* e a atitude perante as TIC (Hernández-Ramos, Martínez Abad, Peñalvo, García, & Rodríguez-Conde, 2014) (Parte III).

Participaram neste questionário 6 professores (1 do género masculino e 5 do género feminino), sendo que todos utilizam computadores na sala de aula. Após a análise dos questionários, foi possível concluir (Tabelas 5.10. e 5.11.) que:

Tabela 5.10.: Distribuição dos professores pelos anos de experiência de ensino.

Género	Experiência de ensino (anos)		Total
	Entre 11 e 15	Mais de 21	
Feminino	2	3	5
Masculino	0	1	1
Total	2	4	6

Tabela 5.11.: Organização dos alunos nas aulas com utilização de computadores.

Organização	Frequência com que o fazem				
	Todas as vezes	Muitas vezes	Às vezes	Poucas vezes	Nunca
Forma individual	0	0	0	3	1
A pares	0	1	2	1	0
Pequenos grupos	0	2	1	1	0
Trabalho num único grupo – Turma	0	2	1	0	1
Depende da tarefa a desenvolver	1	1	1	1	0

Um dos professores referiu que os alunos não utilizam o computador em sala de aula e outros não responderam ao tipo de organização e à frequência com que o fazem.

Dos SGD, todos os professores conhecem o *GeoGebra*, 5 conhecem o *Geometer's Sketchpad*, 3 o *Cabri Géométre* e apenas 1 conhece o *Cinderella*.

Apenas um professor não costuma utilizar SGD. O que mais utilizam é o *GeoGebra* (5), seguindo-se o *Geometer's Sketchpad* (3) e o *Cabri Géométre* (1). Esta utilização é feita, essencialmente, em sala de aula e para preparar as aulas (67%). Os AGD são utilizados nas atividades letivas sempre que se justifique (50%) e sempre que possível (33%).

Quanto ao *GeoGebra*, este já foi utilizado nas atividades letivas por 83% dos professores e a aprendizagem sobre a sua utilização ocorreu por iniciativa própria com 63%, 25% com a ajuda de um colega e 13% frequentando formações. Quanto ao grau de conhecimento na utilização do mesmo, 50% considera que o utiliza com facilidade e 17% considera que o domina ou precisa de ajuda para o utilizar. No entanto, dos 5 professores que o utilizam, todos concordam que este *software* facilita o ensino dos conteúdos e facilita mais a aprendizagem do que utilizando o quadro. Quanto aos domínios matemáticos em que é mais utilizado, GM surge em primeiro lugar seguindo-se Funções, Sequências e Sucessões (FSS).

No que se refere à atitude perante a utilização das TIC em atividades letivas:

- 33% considera que o desempenho das suas aulas é melhor "todas as vezes" que recorre a elas;
- 50% considera que "muitas vezes":
  - novas possibilidades metodológicas surgem nas aulas;
  - os alunos estão mais motivados para trabalhar;
  - melhora e facilita a comunicação professor – aluno;
  - melhora e facilita a aprendizagem dos alunos;
  - melhora a avaliação dos alunos;
  - ajuda no trabalho repetitivo do professor;
  - facilita o ensino para os professores, em sala de aula;
  - os alunos avaliam o meu trabalho de forma mais positiva;
- 67% considera que "às vezes" essa utilização pode criar ansiedade assim como "poucas vezes" pode distrair dos principais objetivos da aprendizagem, quando utilizada em sala de aula.

Um dos professores referiu que "é necessária mais formação creditada neste tipo de *software*".

5.5. Conclusões do Estudo

Após a escolha do domínio GM, e dos anos de escolaridade a aplicar investigação utilizando o SGD *GeoGebra*, procurei que houvesse uma relação sequencial entre os conteúdos a trabalhar, daí ter elegido os seguintes:

(I) Critérios de Semelhança de Triângulos, no 7.º ano;

(II) Teorema de Pitágoras, no 8.º ano;

(III) Trigonometria, no 9.º ano;

(IV) Papiro de Rhind, nos 7.º, 8.º e 9.º anos.

O passo seguinte foi elaborar o rascunho de cada uma das tarefas o qual teria de contemplar uma Ficha de Trabalho para cada ano de escolaridade (que fosse conduzindo os alunos às conclusões pretendidas) e *applets* dinâmicos elaborados em *GeoGebra*. A construção destes *applets* tinha de ter em consideração uma situação extremamente importante e fundamental: o nível de conhecimento e de utilização deste *software*. Depois de uma sondagem informal pelas turmas e pelos docentes anteriores das mesmas, cheguei à conclusão que a maior parte destes alunos não conhecia o *GeoGebra* e/ou nunca tinha trabalhado com ele. Ou seja, um outro desafio se colocava. Se inicialmente tinha pensado em colocar os alunos a construírem os *applets*, após essa sondagem, esta situação caiu por terra, obrigando-me a reestruturar as atividades no *GeoGebra*. Assim, desenvolvi os *applets* de forma a que os alunos trabalhassem autonomamente com o *GeoGebra*, mesmo nunca tendo trabalhado com ele.

Na elaboração das tarefas esteve a minha experiência ao longo destes anos de ensino. Após esse rascunho, centrei-me no papel do aluno, que as iria desenvolver, e procurei na minha memória situações com bons resultados e outras com dificuldades pelas quais já tinha passado aquando da lecionação destes conteúdos. De seguida, procurei incluir o maior número de conteúdos já abordados, em anos anteriores ou no próprio ano, que permitissem, além de uma conexão com os atuais, relembrar e utilizá-los como meio para atingir o que pretendia.

(I) Relativamente às tarefas aplicadas neste ano de escolaridade, tarefas 1 e 2, tinham como objetivo a aprendizagem dos critérios de semelhança de triângulos – LLL, AA e LAL.

A maior dificuldade observada e registada pelos alunos, quer na ficha de trabalho quer na entrevista, foi sem dúvida a comunicação matemática. Ou seja, os alunos foram capazes de manipular corretamente o *GeoGebra* acompanhando a ficha de trabalho e respondendo a todas as questões, quer por via oral quer por escrita, com exceção das conclusões. Perante estas, revelaram dificuldades na parte escrita, a qual implicava a definição dos critérios de semelhança de triângulos.

Revelaram também dificuldades num conteúdo que é abordado no 6.º ano – a Proporcionalidade Direta. Este é um conteúdo da maior importância, mas que poucos são os alunos que o conseguem compreender e aplicar em diversas situações. Daí considerar extremamente importante que o mesmo seja muito bem trabalhado e em diversas situações/domínios: na Álgebra (ALG), na Geometria e Medida (GM), na Organização e Tratamento de Dados (OTD), entre outros, em todos os anos de escolaridade possíveis.

Embora as tarefas tivessem sido pensadas para os alunos resolverem individualmente, o facto de terem trabalhado a pares permitiu que esclarecessem dúvidas entre si, ajudando-se mutuamente. Não é por acaso que, no início e ao longo do ano letivo, digo aos meus alunos que, quando têm dúvidas, devem: em primeiro lugar, procurar esclarecê-las sozinhos, procurando no caderno diário ou no manual escolar; em segundo lugar, procurar ajuda com os colegas do lado, sem perturbar a aula; e por fim, pedir ajuda à professora.

De uma forma geral, todos os alunos compreenderam e definiram os critérios de semelhança de triângulos e o facto de terem trabalhado com o *GeoGebra* e a pares permitiu mais rápida e facilmente chegar a essas conclusões.

(II) Foram aplicadas três tarefas: 3, 4 e 5, que tinham como objetivo a demonstração do Teorema de Pitágoras e a relação entre este e as áreas de figuras planas contruídas sobre os lados do triângulo retângulo.

No geral, os alunos não revelaram grandes dificuldades na realização das tarefas e concluíram com alguma facilidade o pretendido. Os alunos foram capazes de manipular corretamente e sem dificuldades os *applets* construídos no *GeoGebra* e de acompanhar a ficha de trabalho, respondendo a todas as questões, quer por via oral quer por escrita, incluindo as conclusões.

A tarefa 5 surge no sentido de os alunos não se fixarem apenas no quadrado, ou seja, ao enunciarmos o Teorema de Pitágoras, as figuras planas às quais este se refere, geometricamente, é ao quadrado. Assim, esta tarefa vem demonstrar que não se aplica apenas a esta figura plana, mas a todas as que quisermos considerar desde que sejam semelhantes entre si.

De uma forma geral, todos os alunos compreenderam o Teorema de Pitágoras e, tal como no 7.º ano, o recurso ao *GeoGebra* foi fundamental para poderem visualizar várias situações e tirar conclusões.

(III) No 9.º ano, apenas foi aplicada uma tarefa – a tarefa 6. Os alunos não apresentaram dificuldades relevantes, pelo que concluíram facilmente o que se pretendia. Nesta tarefa, era importante que os alunos se lembrassem dos critérios de semelhança de triângulos para tirarem conclusões sobre as razões entre os comprimentos dos lados dos vários triângulos retângulos semelhantes apresentados, fixada a medida da amplitude de um ângulo interno, comum aos triângulos dados – razões trigonométricas. Os alunos, sem visualizarem qualquer construção, são conduzidos a tirar conclusões sobre as razões trigonométricas em outros triângulos semelhantes. Esta questão surge para compreendermos se realmente os alunos são capazes de generalizar as razões trigonométricas para o mesmo ângulo. Além disso, e trabalhando com a **Folha de Cálculo** do *GeoGebra*, puderam tirar conclusões quanto aos valores entre os quais as razões trigonométricas de um ângulo agudo, seno e cosseno, variam.

De uma forma geral, todos os alunos compreenderam as Razões Trigonométricas, tal como nos outros anos letivos, o recurso ao *GeoGebra* foi fundamental para poderem visualizar várias situações e tirar conclusões.

(IV) A tarefa Papiro de Rhind surge pela sua abordagem histórica, pela presença da História da Matemática na sala de aula e também pela sua componente geométrica. Esta tarefa foi um caso especial, por ser uma tarefa transversal aos três anos de escolaridade. Neste caso, o grande desafio prendeu-se em desenvolver a tarefa tendo a mesma base para os três anos de escolaridade, mas direcioná-la, de modo a tirar o maior partido possível dos conteúdos abordados em cada um destes anos.

Os alunos apresentaram mais dificuldades na questão **1.**, uma vez que envolvia a construção de quadriláteros na Ficha de Trabalho e demonstraram particular interesse pela questão **10.**, uma vez que se sentiram como um geómetra egípcio.

Além de estes alunos nunca terem manipulado em outros anos este *software*, foi notório também que a história da Matemática não faz parte do quotidiano das suas aulas nesta disciplina.

Foi interessante verificar o entusiasmo com que os alunos manipularam o *GeoGebra* pois este tornou a sua prestação na atividade mais autónoma e ativa. Se no início do ano a participação de alguns alunos nas atividades propostas era quase uma obrigação, após a realização desta experiência com o *GeoGebra* pelas suas próprias mãos motivou o apreço por este tipo de atividade e o envolvimento na realização das mesmas aumentou.

Capítulo 6 – Considerações Finais

6. Considerações Finais

Neste último capítulo, pretendo abordar as limitações com que me deparei no decorrer desta investigação assim como uma reflexão final acerca de todo este processo.

6.1. Limitações

No decorrer de todo este processo, foram vários os obstáculos que surgiram e que pretendiam limitar a investigação. No entanto, por se tratar de uma vontade, já com bastantes anos, tais não foram impedimento para a concretizar. Essas limitações surgiram em diversas vertentes, como por exemplo:

- **(I)** desconhecimento, por parte dos alunos, do *software* escolhido para o desenvolvimento da tarefa, *GeoGebra* bem como da sua manipulação;
- **(II)** colaboração dos colegas de escola na aplicação das tarefas;
- **(III)** disponibilidade das salas de informática, uma vez que estavam ocupadas com turmas dos Cursos Profissionais da escola e o número de computadores disponíveis nessa sala;
- **(IV)** nervosismo de alguns alunos perante determinada fase da investigação, embora todas elas tenham sido explicitadas em todas as turmas envolvidas.

Assim:

(I) Inicialmente, um dos objetivos da investigação era elaborar Fichas de Trabalho orientadas para que os alunos fossem capazes, autonomamente, de construir os *applets* pretendidos e tirassem as devidas conclusões. Mas, e como referido anteriormente, poucos eram os alunos que conheciam o *GeoGebra* e muitos menos os que já tinham trabalhado com ele. Posto isto, as Fichas de Trabalho elaboradas para os três anos letivos, sobre os quais incidiu a investigação, tiveram de ser pensadas de modo a colmatar esta situação. Foram construídos *applets* usando o *GeoGebra* e de modo que todos os alunos, tendo conhecimento ou não do *software*, fossem capazes de os utilizar sem dificuldades de maior. Esta limitação deixou de existir quando as atividades foram realizadas pois, no geral, todos os alunos conseguiram, através das orientações indicadas nas Fichas de Trabalho, manipular o *GeoGebra*, tirar conclusões para os conteúdos aplicados e divertirem-se com o computador e o programa.

(II) A Escola Secundária de Campo Maior apresentava três docentes de Matemática para cinco turmas do 7.º ano, duas das quais, 7.º B e E, tinham-me sido atribuídas; duas docentes de Matemática para três turmas do 8.º ano, uma das quais, 8.º C, tinha-me sido atribuída e dois docentes de Matemática para três turmas do 9.º ano, sendo que não era docente de nenhuma destas turmas.

Depois de estruturar a investigação e, nomeadamente, as tarefas a aplicar, falei com os colegas de Matemática das restantes turmas do 3.º ciclo, no sentido de solicitar a sua participação na investigação, informando-os que apenas pretendia a sua colaboração na aplicação das tarefas. No entanto, apenas uma dessas docentes – a docente do 9.º B, se mostrou disponível para aplicar a tarefa 6 – Trigonometria no Triângulo Retângulo e a tarefa Papiro de Rhind.

(III) Depois das tarefas, passei à fase da calendarização das mesmas e à requisição das salas de informática. Assim, e após solicitar à compreensão e sensibilização de alguns colegas da escola, propus permutas de salas de modo a conseguir requisitar a referida sala. Contudo, pretendia-se que houvesse um computador por cada aluno, por forma a que este trabalhasse sozinho. No entanto, esta limitação não foi possível ultrapassar, tendo os alunos realizado as tarefas em grupos de dois. Esta situação acabou por ser a ideal pois os alunos iam trocando entre eles dúvidas, quer na manipulação do *GeoGebra* quer nas respostas às questões colocadas.

(IV) Todos os alunos que participaram na entrevista demonstraram muito à-vontade no decorrer da mesma. Porém, houve um aluno – de nível 5 a Matemática e que está inserido nos Quadros de Mérito e Excelência, mas um aluno/adolescente tímido – que iniciou a entrevista mas, tal era o seu nervosismo, que não o senti confortável naquele papel de entrevistado, pelo que suspendi a entrevista.

6.2. Reflexão Final

Termina aqui uma das mais importantes etapas da minha vida profissional – a conclusão do Mestrado em Matemática para Professores. Foi um ano bastante intenso, durante o qual considero que houve um crescimento, quer a nível profissional quer pessoal, por isso foi um ano bastante rico. Nem sempre foi fácil, dados os obstáculos que foram surgindo, mas os mesmos também foram sendo ultrapassados. Com este culminar, e apesar da vida dura da classe docente, mais uma vez tenho a confirmação que esta é, sem dúvida, a profissão que quero continuar a exercer, pela riqueza que a compõe: os alunos – por aquilo que nos ensinam também; as escolas – pelos espaços privilegiados de partilha e de conhecimento tão diversificado e os outros professores – que nos ajudam e que, diariamente, lutam por algo melhor para os seus alunos.

A elaboração desta dissertação foi estruturada apenas num ponto: tirar o melhor partido do SGD *GeoGebra*, utilizando-o como um bom recurso de aprendizagem da Matemática em sala de aula. É claro que este tipo de *software* nunca poderá dispensar a presença de um professor, mas aproxima, cada vez mais, a sala de aula da realidade exterior: o uso constante das novas tecnologias. E os alunos são muito sensíveis a este aspeto pois, todos os dias, são bombardeados com esta necessidade de as utilizar, além de que são muito "visuais". Cada vez mais nos deparamos nas escolas com alunos que pretendem aprender, mas que os resultados dessa aprendizagem sejam imediatos, sem que tenham de despender de muito tempo para o conseguir. É claro que a construção usando papel e lápis é fundamental e necessária, no entanto, é estática! Se pretendemos tirar conclusões, por vezes precisamos de observar resultados utilizando novos elementos, pelo que é necessário repetir os protocolos de construção, o que torna o processo moroso.

Considero que a definição das fases da parte prática da investigação foi fundamental para a organização da mesma, tornando todo o processo mais simples. O contacto com o público, principalmente com a turma da qual não era professora, possibilitou um diagnóstico do conhecimento que tinham com as novas tecnologias, dentro e fora da sala de aula, e da sua utilização. A elaboração das tarefas foi pensada e repensada vezes sem conta para se tornar simples mas eficaz no que toca à utilização do *GeoGebra* e na retirada de conclusões. Esta elaboração contou com a minha experiência profissional, mas também com o conhecimento sobre os alunos que fui adquirindo no decorrer do ano letivo pois, como os professores sabem, à medida que vamos conhecendo melhor os alunos, há respostas que já estamos à espera pelo que, muitas vezes, nos antecipámos nas perguntas, muitas vezes para as evitar, outras para as provocar!

Quanto às tarefas propriamente ditas, considero que surtiram o efeito desejado em cada ano letivo, tendo sido uma mais-valia a utilização do *GeoGebra*. No entanto, e como professora que sou – procurando aprender com o que faço e com o que obtenho do que ensino, faria um ou outro ajuste nas tarefas, tal como referi anteriormente.

No que se refere à história da Matemática, e mais uma vez, constato que a sua presença é fundamental em sala de aula por vários motivos, nomeadamente, pelo despertar dos interesses dos alunos e pelo que contribui para a formação/construção do novo conhecimento. Contudo, e estando no terreno há vários anos, reconheço que, apesar de haver espaço e fazer muito sentido, nem sempre há tempo no decorrer da aula para a introduzir, dada a extensão e exigência do programa em vigor.

A Geometria é, sem dúvida, um domínio muito vasto e privilegiado do qual podemos tirar partido no que se refere ao desenvolvimento das capacidades de explorar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas, recorrendo a um SGD. A Geometria fornece um apoio visual na formulação dessas conjeturas, tornando os alunos parte ativa na construção do seu conhecimento (Tall, 1994).

A teoria de van Hiele ajuda, sem dúvida, a compreender o porquê de muitos alunos apresentarem algumas dificuldades em Matemática, no que se refere ao domínio Geometria. Os alunos são todos diferentes e apesar de receberem, ao longo do dia, os mesmos estímulos nem sempre os interpretam da mesma forma.

Penso que este trabalho poderá constituir um bom ponto de partida para alargar esta investigação ao Ensino Secundário, nomeadamente, ao capítulo Trigonometria do 11.º ano de escolaridade, com a elaboração de *applets* em *GeoGebra*, permitindo aos alunos a possibilidade de visualizações dinâmicas, permitindo tirar conclusões de uma forma rápida e fácil.

Em suma, nesta investigação pretendia aliar o conhecimento autónomo – aprendizagem de novos conteúdos, às novas tecnologias – utilização do *GeoGebra*, o que, na minha opinião, foi bem conseguido. Gostaria que o estudo se tivesse alargado a outros grupos turma, possibilitando a comparação de resultados utilizando ou não o *GeoGebra*, mas tal não foi possível. De referir que a minha participação enquanto investigadora nunca ultrapassou a minha postura enquanto professora, pois considero que, estes dois papeis não passam um sem o outro, em cada aula e em cada turma.

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

Aguiar, C. E. (2009). Óptica e Geometria Dinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *31*(3), 3302.1-3302.5. https://doi.org/10.1590/S1806-11172009005000005

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico*. *Ministério da Educação e Ciência*. Lisboa: Ministério da Educação.

Cajori, F. (1896). *A History of Elementary Mathematics, with Hints on Methods of Teaching*. New York: MacMillan Company.

Diaz, M. A., & Espinoza, C. C. (2013). Levels of Geometric Reasoning in Students of Statal Schools of Maule Region. Talca, Chilie. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *16(2)*, 139–178.

Estrada, M. F. (2000a). A Matemática no Antigo Egipto. In *História da Matemática* (pp. 19–60). Lisboa: Universidade Aberta.

Estrada, M. F., Sá, C. C. de, Queiró, J. F., Silva, M. do C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Gladcheff, A., Zuffi, E. M., & Silva, D. M. da. (2001). Um instrumento para avaliação da qualidade de softwares educacionais de matemática para o ensino fundamental. In *Congresso da Sociedade Brasileira de Computação - VII Workshop de Informática na Escola* (pp. 1–12). Fortaleza, Brasil.

Gravina, M. A. (1996). Geometria Dinâmica - uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação* (pp. 1–13). Belo Horizonte, Brasil.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In *In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung, Springer International Handbooks of Education, 10. Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323–349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_11

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 55–85.

Laborde, C. (1998). Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century – An ICMI Study* (1st ed., pp. 113–121). Dordrecht, Boston: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6

Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, (December 2000), 87–125. https://doi.org/10.1023/A

Montenegro, G. A. (2005). *Inteligência Visual e 3-D - Compreendendo Conceitos Básicos da Geometria Espacial*. São Paulo, Brasil: Editora Edgard Blucher.

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. NCTM.

OECD, Organisation for Economic Co-Operation and Development (2012). *PISA 2009 Technical Report*. Paris: OECD Publishing.

Ponte, J. P. M. da. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *In PROFMAT, 2003 (Orgs.), Actas do ProfMat 2003, (CD-ROM, pp. 25-39)* (Vol. 1, p. 23). Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática.

Ponte, J. P. da, Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., … Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Rodrigues, A. C. (2007). O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de Van Hiele. In *Bolema* (pp. 21–30). Universidade Católica de Brasília.

Ruthven, K., & Hennessy, S. (2002). A Practitioner Model of the Use of Computer-Based Tools and Resources to Support Mathematics Teaching and Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 47–88.

Silva, L., & Candido, C. C. (2007). Modelo de aprendizagem de geometria do casal van Hiele. In *III Simpósio de Iniciação Científica e Pós-Graduação*. São Paulo.

Swetz, F. (2004b). Using Problems from the History of Mathematics. https://doi.org/10.4169/loci002055

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of Mathematics. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. StraBer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (Mathematic, pp. 189–199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. Final Report, Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: Universidade de Chicago.

Anexos

- Anexo A – Teste Diagnóstico (Alunos)
- Anexo B – Questionário TIC (Alunos)
- Anexo C – Autorização dos Encarregados de Educação
- Anexo D – Ficha de Trabalho 7.º ano
- Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano
- Anexo F – Ficha de Trabalho 9.º ano
- Anexo G – Grelha de Observação
- Anexo H – Grelha de Observação 9.º ano – Parte I
- Anexo I – Guião da Entrevista
- Anexo J – Questionário TIC (Professores)

Anexo A – Teste Diagnóstico (Alunos)

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

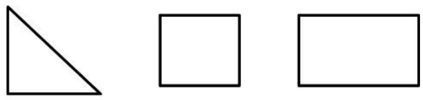
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CAMPO MAIOR

TESTE DIAGNÓSTICO

Matemática **fevereiro de 2017**

Este teste tem por objetivo identificar as competências matemáticas desenvolvidas no tema de Geometria. Este questionário é composto por 13 questões de Escolha Múltipla, com cinco opções de resposta em que apenas uma está correta, a qual deverás assinalar com **X**. Não é esperado que saibas responder a todas as questões. Para isso, lê cuidadosamente todas as questões. Desde já agradece-se a tua valiosa colaboração.

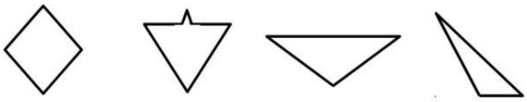
1. Na figura abaixo, identifica a(s) que representa(m) um quadrado?



K L M

- ☐ **(A)** Apenas a figura K.
- ☐ **(B)** Apenas a figura L.
- ☐ **(C)** Apenas a figura M.
- ☐ **(D)** Apenas as figuras L e M.
- ☐ **(E)** Todas as figuras são quadrados.

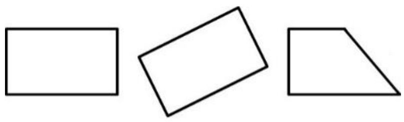
2. Na figura abaixo, qual(is) define(m) um triângulo?



U V W X

- ☐ **(A)** Nenhuma das figuras é um triângulo.
- ☐ **(B)** Apenas a figura V.
- ☐ **(C)** Apenas a figura W.
- ☐ **(D)** Apenas as figuras W e X.
- ☐ **(E)** Apenas as figuras V e W.

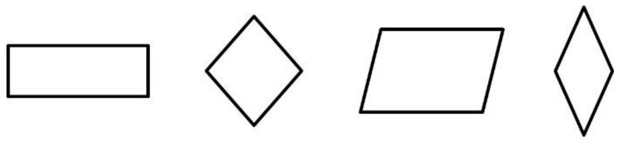
3. Na figura abaixo, mostra qual(is) representa(m) um retângulo?



S T U

- ☐ **(A)** Apenas a figura S.
- ☐ **(B)** Apenas a figura T.
- ☐ **(C)** Apenas as figuras S e T.
- ☐ **(D)** Apenas as figuras S e U.
- ☐ **(E)** Todas as figuras são retângulos.

4. Na figura abaixo, identifica a(s) que representa(m) um quadrado?



F G H I

☐ **(A)** Nenhuma das figuras é um quadrado.

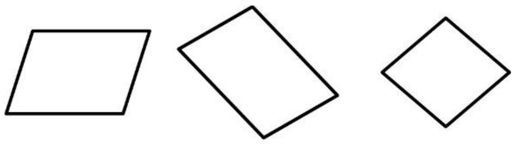
☐ **(B)** Apenas a figura G.

☐ **(C)** Apenas as figuras F e G.

☐ **(D)** Apenas as figuras G e I.

☐ **(E)** Todas as figuras são quadrados.

5. Na figura abaixo, qual(is) define(m) um paralelogramo?



J M L

☐ **(A)** Apenas a figura J.

☐ **(B)** Apenas a figura L.

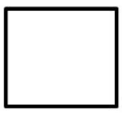
☐ **(C)** Apenas as figuras J e M.

☐ **(D)** Nenhuma das figuras é um paralelogramo.

☐ **(E)** Todas as figuras são paralelogramos.

6. Seja $[PQRS]$ um quadrado. Das seguintes afirmações, qual é verdadeira para todos os quadrados?

P Q



S R

☐ **(A)** Os segmentos de reta $[PR]$ e $[RS]$ têm o mesmo comprimento.

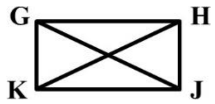
☐ **(B)** Os segmentos de reta $[QS]$ e $[PR]$ são perpendiculares.

☐ **(C)** Os segmentos de reta $[PS]$ e $[QR]$ são perpendiculares.

☐ **(D)** Os segmentos de reta $[PS]$ e $[QS]$ têm o mesmo comprimento.

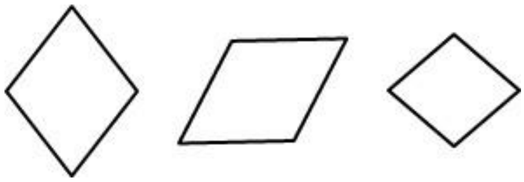
☐ **(E)** A medida do ângulo Q é maior que o ângulo R.

7. Num retângulo $[GHJK]$, os segmentos de reta $[GJ]$ e $[HK]$ são as suas diagonais. Das seguintes afirmações qual **não** é verdadeira para todos os retângulos?



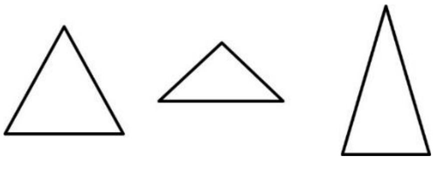
- ☐ **(A)** A figura tem quatro ângulos retos.
- ☐ **(B)** A figura tem quatro lados.
- ☐ **(C)** As diagonais têm o mesmo comprimento.
- ☐ **(D)** Os lados opostos têm o mesmo comprimento.
- ☐ **(E)** As afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** são verdadeiras para qualquer retângulo.

8. A figura abaixo representa losangos que é uma figura de quatro lados, cujos lados têm o mesmo comprimento. Das seguintes afirmações qual não é verdadeira para todos os losangos?



- ☐ **(A)** As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
- ☐ **(B)** Cada diagonal interseta dois ângulos do losango.
- ☐ **(C)** As duas diagonais são perpendiculares.
- ☐ **(D)** Os ângulos opostos têm a mesma medida.
- ☐ **(E)** As afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** são verdadeiras para qualquer losango.

9. A figura abaixo representa triângulos isósceles, que é um triângulo com pelo menos dois lados de igual comprimento. Das seguintes afirmações qual é verdadeira para todos os triângulos isósceles?



- ☐ **(A)** Os três lados têm o mesmo comprimento.
- ☐ **(B)** Um dos lados tem o dobro do comprimento do outro lado.
- ☐ **(C)** Tem pelo menos dois ângulos com a mesma medida.
- ☐ **(D)** Os três ângulos têm a mesma medida.
- ☐ **(E)** As afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** não são verdadeiras para qualquer triângulo isósceles.

10. Sejam as seguintes afirmações:

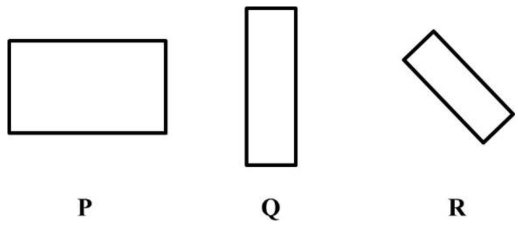
A1: O triângulo $[ABC]$ tem três lados com o mesmo comprimento.

A2: No triângulo $[ABC]$, os ângulos B e C têm a mesma medida.

Qual está correta?

- ☐ **(A)** As afirmações **A1** e **A2** não podem ser ambas verdadeiras.
- ☐ **(B)** Se **A1** é verdadeira então **A2** é verdadeira.
- ☐ **(C)** Se **A2** é verdadeira então **A1** é verdadeira.
- ☐ **(D)** Se **A1** é falsa então **A2** é falsa.
- ☐ **(E)** As afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** não estão corretas.

11. Na figura abaixo, qual pode ser classificado como um retângulo?



- ☐ **(A)** Podem ser todas.
- ☐ **(B)** Apenas a figura Q.
- ☐ **(C)** Apenas a figura R.
- ☐ **(D)** Apenas as figuras P e Q.
- ☐ **(E)** Apenas as figuras Q e R.

12. Qual é a afirmação verdadeira?

- ☐ **(A)** Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os quadrados.
- ☐ **(B)** Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os retângulos.
- ☐ **(C)** Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os paralelogramos.
- ☐ **(D)** Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.
- ☐ **(E)** As afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** são verdadeiras.

13. O que é que todos os retângulos têm, que só alguns paralelogramos não têm?

- ☐ **(A)** Lados opostos iguais.
- ☐ **(B)** Diagonais iguais.
- ☐ **(C)** Lados opostos paralelos.
- ☐ **(D)** Ângulos opostos iguais.
- ☐ **(E)** Nenhuma das afirmações **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)**.

Anexo B – Questionário TIC (Alunos)

A UTILIZAÇÃO DAS TIC[1] E AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA[2] EM SALA DE AULA POR ALUNOS DO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Questionário

Este questionário pretende saber a tua opinião sobre a experiência que tens na utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação bem como na utilização do *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*. Quando não souberes responder a uma questão, não respondas. Será preservado o anonimato e a confidencialidade dos teus dados recolhidos. A tua colaboração no preenchimento deste questionário é muito importante.

Instruções de Preenchimento	Para cada questão assinala com uma cruz a quadrícula correspondente. Exemplo: **Género** Se feminino, inscrever ☐ Masculino ☒ Feminino

Parte I

Assinala com X a quadrícula que melhor corresponde à tua escolha:

1. Dados do Aluno

1.1. A que turma pertences? ___________________

1.2. Género ☐ Masculino ☐ Feminino

1.3. Que idade tens?

☐ Menos de 12 anos ☐ 12 anos ☐ 13 anos
☐ 14 anos ☐ 15 anos ☐ Mais de 15 anos

1.4. Nível obtido a Matemática no 1.º Período:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

[1] Tecnologias de Informação e Comunicação.
[2] *Software* de construção que nos oferece "régua e compasso eletrónicos".

Parte II

Assinala com X uma das quadrículas à direita que melhor corresponde à tua escolha:

2. Disponibilidade de TIC

2.1. Dos seguintes dispositivos (equipamentos) qual(is) tens disponível(is) para utilizar em casa?

	Sim e utilizo	Sim, mas não utilizo	Não
A. Computador de Secretária	☐	☐	☐
B. Computador Portátil ou *Notebook*	☐	☐	☐
C. Tablet (por ex.: *Ipad*, …)	☐	☐	☐
D. Ligação à *Internet*	☐	☐	☐
E. *Pen Drives* USB	☐	☐	☐
F. Outro: ____________________	☐	☐	☐

2.2. Dos seguintes dispositivos (equipamentos) qual(is) tens disponível(is) para utilização na escola?

	Sim e utilizo	Sim, mas não utilizo	Não
A. Computadores de Secretária	☐	☐	☐
B. Computadores Portáteis ou *Notebook*	☐	☐	☐
C. Ligação à *Internet*	☐	☐	☐
D. Impressora	☐	☐	☐
E. *Pen Drives* USB	☐	☐	☐
F. Outro: ____________________	☐	☐	☐

3. Utilização geral de Computadores

3.1. Alguma vez utilizaste um computador? ☐ Sim ☐ Não

Se respondeste **sim**, continua a responder ao questionário.

Se respondeste **não**, por favor termina aqui.

4. Utilização das TIC em casa

Instruções de Preenchimento	Nas questões seguintes, assinala com uma cruz a quadrícula correspondente: ① – nunca ou quase nunca; ② – uma a duas vezes por mês; ③ – uma a duas vezes por semana; ④ – todos os dias ou quase todos os dias.

4.1. Com que frequência utilizas, em casa, as TIC para:

	①	②	③	④
Jogar jogos	☐	☐	☐	☐
Fazer os trabalhos da Escola				
• Realizar os trabalhos de casa	☐	☐	☐	☐
• Utilizar o correio eletrónico para comunicar com outros colegas sobre os trabalhos de casa	☐	☐	☐	☐
• Utilizar o correio eletrónico para comunicar com os professores e submeter trabalhos de casa ou outros trabalhos da escola	☐	☐	☐	☐
• Fazer o download e upload de material sugerido/enviado pelos professores	☐	☐	☐	☐
• Procurar na página da escola por informações	☐	☐	☐	☐
• Utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com outros colegas	☐	☐	☐	☐
• Utilizar as Redes Sociais para partilhar informações com os professores	☐	☐	☐	☐
• Outro: ______________________	☐	☐	☐	☐
Ver o correio eletrónico	☐	☐	☐	☐
Conversar *online* (*Chat*)	☐	☐	☐	☐
Navegar na *Internet* (ver por ex.: *YouTube*)	☐	☐	☐	☐
Efetuar o *download* de músicas, filmes, jogos ou programas da *Internet*	☐	☐	☐	☐
Publicar em Redes Sociais (por ex.: *Facebook*)	☐	☐	☐	☐
Outro: ______________________	☐	☐	☐	☐

5. Utilização das TIC na escola

Instruções de Preenchimento	Nas questões seguintes, assinala com uma cruz a quadrícula correspondente: ① - nenhum tempo; ② - 0 a 30 minutos por semana; ③ - 31 a 60 minutos por semana; ④ - mais de 60 minutos por semana.

5.1. Durante a semana, quanto tempo é dedicado à utilização do computador numa aula de:

	①	②	③	④
Português	☐	☐	☐	☐
Matemática	☐	☐	☐	☐
Física e Química	☐	☐	☐	☐
Língua estrangeira	☐	☐	☐	☐
Outra: ____________________	☐	☐	☐	☐
Outra: ____________________	☐	☐	☐	☐

5.2. Em tempo de aulas, quanto tempo usas o computador na escola (fora da sala de aula) em tarefas de apoio ao estudo / realização do trabalho de casa, por semana?

Nenhum	☐
Meia hora	☐
Uma hora	☐
Duas horas	☐
Três horas	☐
Quatro ou mais horas	☐

6. Atitude perante os computadores

Instruções de Preenchimento	Nas questões seguintes, assinala com uma cruz a quadrícula correspondente: ① – discordo totalmente; ② – discordo; ③ – concordo; ④ – concordo totalmente; **N/A** – não aplicável.

6.1. Sobre a tua experiência com computadores: indica o grau de concordância para cada afirmação.

	①	②	③	④	N/A
É muito importante trabalhar com um computador	☐	☐	☐	☐	☐
Jogar com computadores é divertido	☐	☐	☐	☐	☐
Trabalhar com computadores é divertido	☐	☐	☐	☐	☐
Utilizo o computador porque estou muito interessado	☐	☐	☐	☐	☐
Quando trabalho com o computador entusiasmo-me e perco a noção do tempo	☐	☐	☐	☐	☐
Outro: ____________________	☐	☐	☐	☐	☐

7. Utilização de *software* de Geometria Dinâmica

7.1. Dos seguintes *softwares* de Geometria Dinâmica, assinala o(s) que conheces?

Cabri Géométre ☐
GeoGebra ☐
Cinderella ☐
C.a.R ☐
Geometer's Sketchpad ☐
Nenhum ☐
Outro: ____________________ ☐

7.2. Em que situação(ões) utilizaste o(s) *software*(*s*) anteriores?

Na escola ☐
Em casa ☐
Em casa de um colega ☐
Nunca ☐
Outra: ____________________ ☐

8. A tua experiência com *GeoGebra*

Instruções de Preenchimento	Nas questões seguintes, assinala com uma cruz a quadrícula correspondente: ① - discordo totalmente; ② - discordo; ③ - não concordo nem discordo; ④ - concordo; ⑤ - concordo totalmente.

8.1. Com a utilização do *software Geogebra*:

	①	②	③	④	⑤
Sinto-me mais motivado para aprender sozinho(a);	☐	☐	☐	☐	☐
Melhoro o meu desempenho escolar;	☐	☐	☐	☐	☐
Sinto que estou mais atento(a);	☐	☐	☐	☐	☐
Aumento o meu interesse pela disciplina;	☐	☐	☐	☐	☐
Envolvo-me mais nas tarefas propostas;	☐	☐	☐	☐	☐
Fico mais confiante perante a aprendizagem;	☐	☐	☐	☐	☐
Tomo decisões mais facilmente;	☐	☐	☐	☐	☐
Sinto mais autonomia na aprendizagem;	☐	☐	☐	☐	☐
Tenho mais confiança nas minhas capacidades;	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto de colocar questões;	☐	☐	☐	☐	☐
Tenho mais facilidade na interpretação dos conceitos;	☐	☐	☐	☐	☐
Esforço-me por realizar melhor os trabalhos propostos na aula;	☐	☐	☐	☐	☐
Realizo os trabalhos propostos com mais prazer;	☐	☐	☐	☐	☐
Outro: ______________________	☐	☐	☐	☐	☐

8.2. Sentiste dificuldades na utilização do *software GeoGebra*? ☐ Sim ☐ Não

Quais? ____

____

____

8.3. Quais as vantagens da utilização do *software* *GeoGebra* no ensino da Matemática?

____

____

____

8.4. A utilização do *software* *GeoGebra*:

a. facilitou-te a realização das tarefas desenvolvidas na sala de aula?

____

____

____

b. contribuiu/contribui para a melhoria das tuas aprendizagens e compreensão dos conteúdos lecionados?

____

____

____

Fim do Questionário

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo C – Autorização Encarregados de Educação

AUTORIZAÇÃO

Exm(a). Sr(a). Encarregado de Educação

Eu, Luísa Alexandra Carvalho de Oliveira, professora de Matemática do Agrupamento de Escolas de Campo Maior, venho, por este meio, solicitar a sua autorização para permitir que o seu/sua educando(a) participe num estudo de caso, no âmbito da "Conceção e Implementação no GeoGebra de *applets* dinâmicos para os ensinos Básico e Secundário", na disciplina de Matemática. Para dar seguimento a esse estudo, necessito recolher dados sobre conteúdos abordados na disciplina de Matemática no presente ano letivo. Este estudo terá lugar durante o 2.º Período escolar, com uma duração prevista de 2 a 4 aulas, nas quais se realizarão aplicações do tópico matemático que está a ser tratado nas aulas.

Se autorizar o(a) seu/sua educando(a) a participar neste estudo, além da realização de tarefas consistentes com o currículo escolar do(a) seu/sua educando(a) com recurso a *applets* dinâmicos, também terá que responder a questionários de forma anónima. Os questionários não servirão para a avaliação do seu educando, mas apenas para tentar compreender a perceção que tiveram das aulas e como apreenderam os conteúdos.

Em caso de registos do(a) seu/sua educando(a), incluindo dados áudio ou publicação dos questionários, será sempre preservado o anonimato e a confidencialidade dos seus dados recolhidos.

Agradeço desde já a sua colaboração.

Com os melhores cumprimentos,

6 de fevereiro de 2017

Assinatura da professora: ______________________________

✂---

Eu, encarregado de educação do(a) aluno(a) ____,
n.º ________, da turma ________, do ________.º ano, do Agrupamento de Escolas de Campo Maior,

☐ autorizo ☐ não autorizo

a participação do meu educando num estudo de caso a realizar pela professora Luísa Alexandra Carvalho de Oliveira.

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação

____

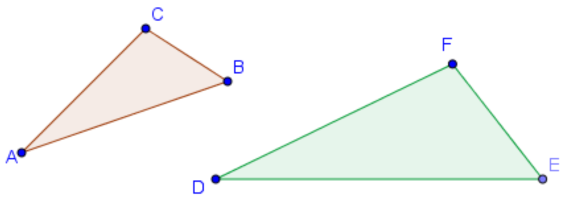
Anexo D – Ficha de Trabalho 7.º ano

CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

- **Critério LLL**

Acede ao ficheiro Tarefa 1.ggb e abre-o.

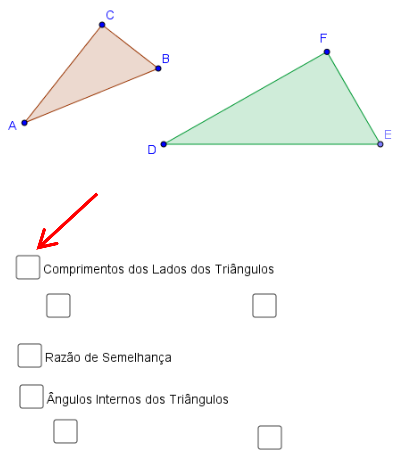
Considera os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.



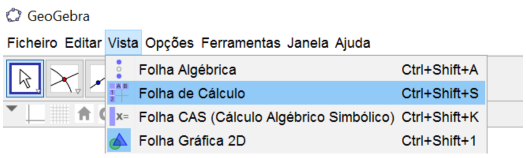
1. Estabelece uma correspondência entre os lados dos dois triângulos.

Triângulo $[ABC]$		**Triângulo** $[DEF]$
$[AB]$	→	$[DE]$
	→	
	→	

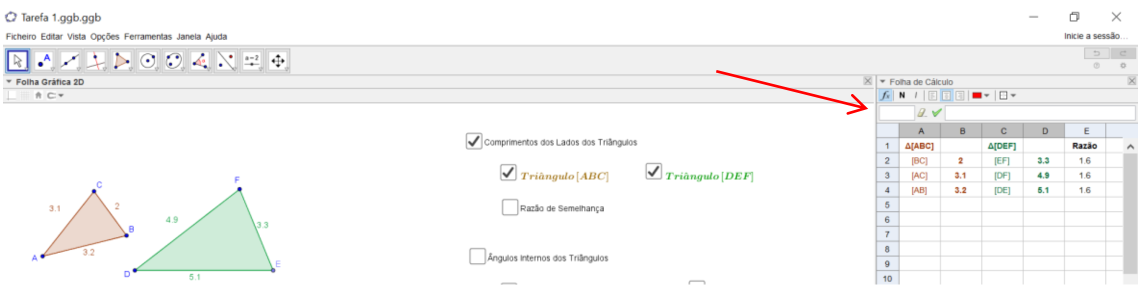
2. Vamos analisar os comprimentos dos lados dos dois triângulos.
Com o cursor, clica na opção ***Comprimentos dos Lados dos Triângulos*** que aparece na folha gráfica.
Surgem duas opções: *Triângulo* $[ABC]$ e *Triângulo* $[DEF]$.
Clica nos dois quadrados e observa as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos.



3. Abre uma folha de cálculo: **Vista** → **Folha de Cálculo**.



Aparece uma **Folha de Cálculo** do lado direito do ecrã.



Repara que algumas células da Folha de Cálculo estão preenchidas:

- **Coluna A:** Lados e ângulos internos do triângulo $[ABC]$;
- **Coluna B:** Medidas dos comprimentos dos lados e amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$;
- **Coluna C:** Lados e ângulos internos do triângulo $[DEF]$ correspondentes do triângulo $[ABC]$;
- **Coluna D:** Medidas dos comprimentos dos lados e amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[DEF]$;
- **Coluna E:** Razão entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes;
- Podes observar também a amplitude dos ângulos internos dos dois triângulos.

Se movimentares algum dos pontos do triângulo $[ABC]$, os valores da tabela alteram-se automaticamente.

4. Considera que o triângulo $[ABC]$ é transformado no triângulo $[DEF]$. Regista os valores obtidos na tabela seguinte:

Coluna A	Coluna B		Coluna C	Coluna D	Coluna E
Triângulo $[ABC]$			**Triângulo** $[DEF]$		**Razão entre as medidas dos lados correspondentes**
$[BC]$	$\overline{BC} =$	$\rightarrow$			$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\quad}{\quad} =$
$[AC]$	$\overline{AC} =$	$\rightarrow$			
$[AB]$	$\overline{AB} =$	$\rightarrow$			

a. O que observas relativamente aos valores obtidos na **Coluna E**? ________________

b. O que representa o valor obtido na **Coluna E**? ______________________________.
Neste caso, $r =$ ______.

c. Os dois triângulos são semelhantes? ______________________________________
Justifica. ____

d. Qual a razão de semelhança que transforma o triângulo $[DEF]$ no triângulo $[ABC]$?
$r =$ ______

5. Com o cursor, clica na opção ***Razão de Semelhança*** que aparece na folha gráfica. Surge o seletor $\boldsymbol{r}$. Desloca-o para os diferentes valores que ele pode assumir, e observa o que acontece ao triângulo $[DEF]$. ____________________________________

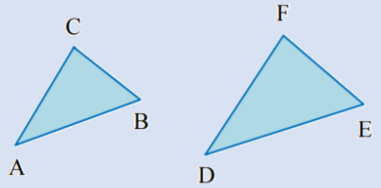
6. Fixa r em $0{,}6$. Que transformação ocorreu? ____________________________________
Qual a relação entre os segmentos de reta $[EF]$ e $[BC]$? ___________________________

7. Fixa r em $2{,}5$. Neste caso, o que podes concluir quanto à transformação ocorrida relativamente ao triângulo $[ABC]$? ______________________________________

   Qual a relação entre os segmentos de reta $[EF]$ e $[BC]$? ________________________

8. Qual é o valor que deves fixar para r de modo que os dois triângulos sejam geometricamente iguais? $r =$ _____

<u>CONCLUSÃO:</u>

Critério de Semelhança ***LLL***	Em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente _______________, ou seja, $\dfrac{\Delta[DEF] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \quad \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = r$ 

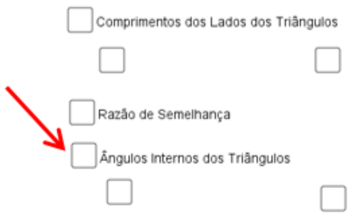
- **<u>Critério AA</u>**

  Como pudeste concluir, os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes.
  Vamos agora analisar as amplitudes dos ângulos internos de dois triângulos semelhantes.

1. Com o cursor desseleciona os comprimentos dos lados dos triângulos.

2. Fixa uma razão de semelhança à tua escolha, de modo que o triângulo $[DEF]$ seja uma **<u>ampliação</u>** do triângulo $[ABC]$: $r =$ ______.

3. Para analisares as amplitudes dos ângulos internos dos dois triângulos, clica na opção ***Ângulos Internos dos Triângulos*** que aparece na folha gráfica.
Surgem duas opções: *Triângulo $[ABC]$* e *Triângulo $[DEF]$*. Clica nos dois quadrados e observa essas amplitudes.



4. Completa a tabela com as medidas das amplitudes dos ângulos internos dos dois triângulos:

Ampliação

	Triângulo $[ABC]$		**Triângulo** $[DEF]$
	$B\hat{A}C =$	$\rightarrow$	$E\hat{D}F =$
	$A\hat{C}B =$	$\rightarrow$	$D\hat{F}E =$
	$C\hat{B}A =$	$\rightarrow$	$F\hat{E}D =$
TOTAL			

a. Comparando os valores das duas colunas, o que observas? ______________________

b. Altera a razão de semelhança, mantendo uma ampliação. As amplitudes destes ângulos alteraram-se? ____

c. Completa:
Para dois triângulos serem semelhantes basta que tenham os __________________
____

5. Altera a razão de semelhança, de modo que, agora, o triângulo $[DEF]$ seja uma **<u>redução</u>** do triângulo $[ABC]$. Completa a tabela.

Redução

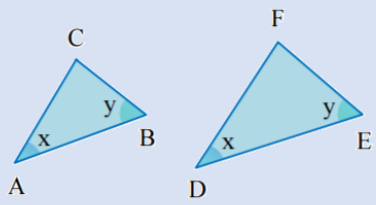
	Triângulo $[ABC]$		**Triângulo** $[DEF]$
	$B\hat{A}C =$	$\rightarrow$	$E\hat{D}F =$
	$A\hat{C}B =$	$\rightarrow$	$D\hat{F}E =$
	$C\hat{B}A =$	$\rightarrow$	$F\hat{E}D =$
TOTAL			

a. Comparando os valores das duas colunas, o que observas? ______________________

b. Altera a razão de semelhança, mantendo uma redução. As amplitudes destes ângulos alteraram-se? ____

<u>CONCLUSÃO:</u>

<table>
<tr><td rowspan="2">Critério de Semelhança

AA</td><td>Em triângulos semelhantes, os ângulos correspondentes são ____.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

6. Porque será que este critério se designa apenas por AA e não por AAA ?

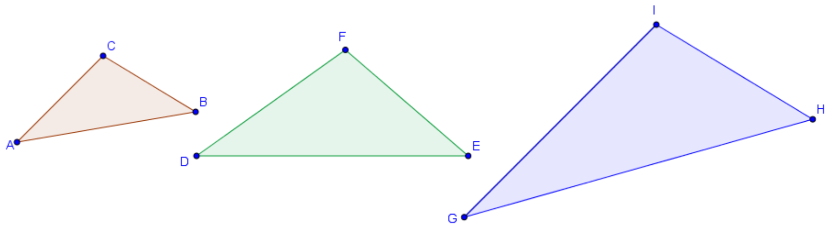
____

____

- **<u>Critério LAL</u>**

Acede ao ficheiro Tarefa 2.ggb e abre-o.

Considera os triângulos $[ABC]$, $[DEF]$ e $[GHI]$.



1. Visualiza a amplitude dos seguintes ângulos internos dos triângulos dados clicando em ***Amplitude dos Ângulos Correspondentes*** que se encontra na folha gráfica:

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[DEF]$	**Triângulo** $[GHI]$
$A\hat{C}B =$	$D\hat{F}E =$	$G\hat{I}H =$

2. Visualiza o comprimento dos seguintes lados dos triângulos clicando em ***Comprimento dos Lados Correspondentes*** que se encontra na folha gráfica:

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[DEF]$	**Triângulo** $[GHI]$
$\overline{AC} =$	$\overline{DF} =$	$\overline{GI} =$
$\overline{CB} =$	$\overline{FE} =$	$\overline{IH} =$
$\overline{AB} =$		$\overline{GH} =$

3. Completa a tabela seguinte, apresentado as razões entre os comprimentos dos lados na forma de fração irredutível.

	Triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$	**Triângulos** $[ABC]$ e $[GHI]$
	$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\quad}{\quad}$	$\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{\quad}{\quad}$
	$\frac{\overline{FE}}{\overline{CB}} = \frac{\quad}{\quad}$	$\frac{\overline{IH}}{\overline{CB}} = \frac{\quad}{\quad}$
	$A\hat{C}B =$	$A\hat{C}B =$
	$D\hat{F}E =$	$G\hat{I}H =$
CONCLUSÃO (quanto à semelhança)		

Repara que o ângulo igual está entre os dois lados em que os comprimentos são diretamente proporcionais.

a. Vamos continuar a analisar os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$.

Calcula a razão entre: $\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{\overline{GI}}{\overline{AC}} = \frac{\quad}{\quad} =$

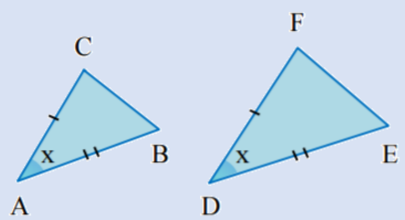
Indica a amplitude dos ângulos: $H\hat{G}I =$ $B\hat{A}C =$

b. Os triângulos $[ABC]$ e $[GHI]$ têm **dois lados** ______________________________

mas o **ângulo** formado por esses dois lados ______________________________.

Logo, os triângulos ____.

CONCLUSÃO:

Critério de Semelhança ***LAL***	Dois triângulos são semelhantes se ________________ ____ ____ ____. 

Parte II

A MATEMÁTICA NA ANTIGUIDADE

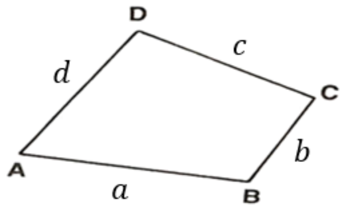
O Papiro de Rhind e os problemas geométricos…

É o documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia, e de onde provém grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática. Foi comprado em 1858, por Alexander Henry Rhind e, atualmente, encontra-se no Museu Britânico.

O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e consta de 87 problemas, dos quais alguns são geométricos, em escrita hierática. Foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, daí ser conhecido também por papiro de Ahmes, que, por sua vez, o copiou de um texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

Áreas de Quadriláteros Convexos

Considera um quadrilátero convexo de lados sucessivos a , b , c e d.
Os geómetras egípcios da Antiguidade usavam a fórmula:



$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) \qquad \textbf{(1)}$$

para calcular a área (A) de um quadrilátero convexo.

Como se designam os lados a e c do quadrilátero? ____

Acede ao ficheiro Papiro_Rhind.ggb e abre-o.

Os seletores:

- $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AD}$ referem-se aos comprimentos dos lados do quadrilátero $[ABCD]$;
- seletor $\boldsymbol{\alpha}$ refere-se à amplitude de um dos ângulos internos do quadrilátero $[ABCD]$, neste caso, do ângulo BAD.

Consoante a medida do comprimento dos lados e da amplitude do ângulo interno, visualizarás:

- a classificação do quadrilátero correspondente;
- a fórmula convencional para a sua área e o respetivo cálculo;
- fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para a sua área e o respetivo cálculo.

Abrindo a Folha de Cálculo (menu **VISTA** → **Folha de Cálculo)** podes observar:

- na **coluna A** - a área do quadrilátero convexo considerado utilizando a fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios;
- na **coluna C** - o **Erro Cometido** (diferença entre essas duas áreas);
- na **coluna D** – a amplitude de α.

1. Desloca os seletores para obteres os quadriláteros que te são pedidos nas próximas questões.

No preenchimento das tabelas que se seguem, deverás ter em conta o seguinte:

- na **Representação** – desenhar o quadrilátero que pretendes e indicar as medidas dos comprimentos considerados bem como do ângulo interno considerado;
- na **Fórmula Convencional** e na **Fórmula dos geómetras egípcios** - indicar as medidas dos comprimentos considerados. Terás o apoio ao cálculo das áreas na folha gráfica e/ou na **Folha de Cálculo**.

a. Mostra que esta fórmula utilizada pelos egípcios **(1)** está correta no caso de o quadrilátero ser um retângulo. Para isso, após a representação do retângulo que pretendes analisar, compara a sua área considerando a fórmula convencional e a fórmula utilizada pelos egípcios.

Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Retângulo		$A = c \times l$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Quadrado		$A = l^2$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Comparando o resultado obtido pela fórmula convencional com o resultado obtido pela fórmula dos egípcios, o que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do retângulo? ____
- do quadrado? ____

b. Será que o mesmo acontece para este tipo de paralelogramos? Repete o processo anterior, considerando paralelogramos não retângulos.

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Paralelogramo Obliquângulo		$A = b \times h$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Compara os dois resultados obtidos em cada paralelogramo. O que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

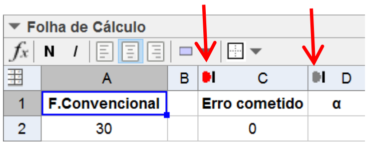
- do paralelogramo obliquângulo? ______________________________
- do losango? ____

2. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

____

3. Desloca o seletor α para $90°$.

4. Na Folha de Cálculo, clica sobre os símbolos que se encontram nas **células C** e **D**, os quais devem ficar vermelhos.



5. Desloca o seletor α até ao valor mínimo. As **colunas C** e **D** preencher-se-ão automaticamente com o **Erro Cometido** e a amplitude do ângulo α, respetivamente.

6. Observa as **colunas C** e **D**.

Qual a amplitude de α quando o **Erro Cometido** é:

- igual a zero? $\alpha =$ _______
- máximo? $\alpha =$ _______

Completa:

*À medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do **Erro cometido*** __________

7. O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

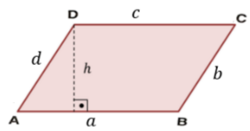
____

____

8. Vamos mostrar em que casos a igualdade seguinte se verifica, ou seja, em que paralelogramos a área calculada usando a fórmula convencional é igual à área calculada usando a fórmula dos geómetras egípcios:

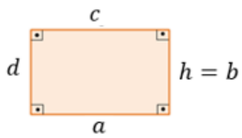
$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$. Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica?



____

Então,



$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

Como a e c são lados ________________ do paralelogramo, logo, a ___ c assim como $b =$ ___.

Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a+a)(b+\_\_\_) \Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Onde se conclui que: $\Leftrightarrow \; A = a \times b$

9. Como pudeste concluir na **questão 1.**, nem sempre a área de um paralelogramo é igual quando calculada usando fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios. Vamos mostrar que, na realidade, para um quadrilátero convexo, é verdade que:

$$A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

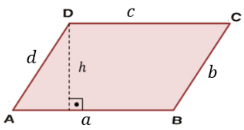
ou seja, a área calculada pela fórmula convencional é sempre menor ou igual à área quando calculada pela fórmula dos egípcios.

Área de um Paralelogramo

$A = base \times altura$

ou seja,

$A = a \times h$



Repara que, dependendo do paralelogramo, a medida da altura (h) é menor ou igual à medida do lado (b), ou seja: $h \leq b$.

Se multiplicarmos ambos os membros por a:

$$\times a \qquad h \leq b$$

$$\underbrace{\underline{\quad} \times h} \leq \underline{\quad} \times b$$

Sabendo que $A = a \times h$, então $\underline{\quad} \leq \underline{\qquad\quad}$

E como, $A = a \times b = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$

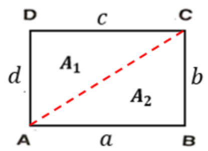
Concluindo que $\boxed{A \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d)}$

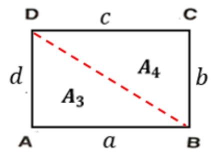
10. Como terão os egípcios chegado à fórmula **(1)**?

Os egípcios conheciam, possivelmente, a regra para o cálculo da área de triângulos.

Vamos tentar fazer como eles!

Uma possível explicação para chegar a esta fórmula seria:





$A_1 = \frac{c \times d}{2} = \frac{cd}{2}$ e $A_2 = \frac{\underline{\quad}}{2}$

$A_1 + A_2 = \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}}$

$A_3 = \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}}$ e $A_4 = \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}}$

$A_3 + A_4 = \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}}$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{\underline{\quad}}$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por $\underline{\quad}$

$$A = \frac{cd + \quad + \quad + \quad}{2} \div 2 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{2} \times \frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}} = \frac{ab + ad + bc + cd}{\underline{\quad}}$$

Como a é um fator comum a ab e a ad e c é um fator comum a bc e a cd,

$$A = \frac{a(b + d) + c(\quad + \quad)}{\underline{\quad}}$$

Como $(b + d)$ é um fator comum a a e a c,

$$A = \frac{(a + c)(\quad + \quad)}{\underline{\quad}} = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$$

Terá sido este o raciocínio utilizado pelos geómetras egípcios?

Anexo E – Ficha de Trabalho 8.º ano

DECOMPOSIÇÃO DE UM TRIÂNGULO PELA ALTURA REFERENTE À HIPOTENUSA

Acede ao ficheiro Tarefa 3.ggb e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em C (**Figura 1**).

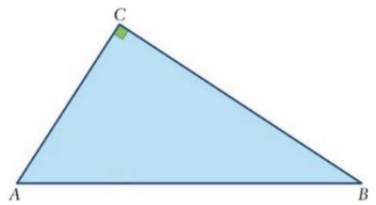


Figura 1

1. Como se designam os lados:

$[AB]$ → ______________________

$[BC]$ → ______________________

$[AC]$ → ______________________

2. Clica sobre ***Altura do Triângulo*** $[\boldsymbol{ABC}]$ que se encontra na folha gráfica.

O triângulo $[ABC]$ foi decomposto em dois triângulos, $[ADC]$ e $[DBC]$ (**Figura 2**).

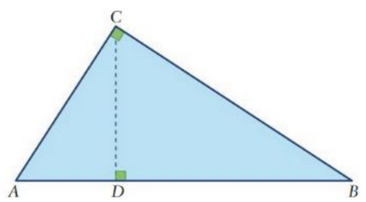


Figura 2

Indica o nome dos lados em cada um dos triângulos:

Triângulo $[ADC]$

$[AD]$ → ______________________

$[DC]$ → ______________________

$[AC]$ → ______________________

Triângulo $[DBC]$

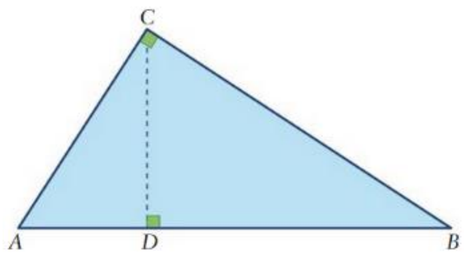
$[DB]$ → ______________________

$[DC]$ → ______________________

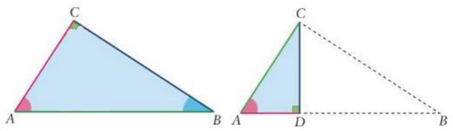
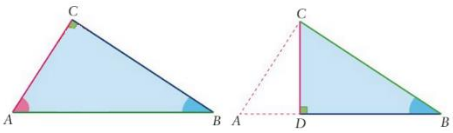
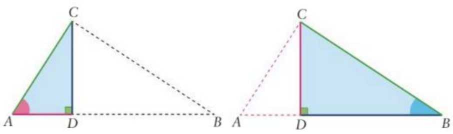
$[BC]$ → ______________________

3. Indica a medida da amplitude dos ângulos internos de cada um dos três triângulos, clicando em ***Amplitude dos Ângulos Internos***.

Triângulo $[ABC]$	**Triângulo** $[ADC]$	**Triângulo** $[DBC]$
$A\hat{C}B =$	$C\hat{D}A =$	$B\hat{D}C =$
$B\hat{A}C =$	$D\hat{A}C =$	$D\hat{C}B =$
$C\hat{B}A =$	$A\hat{C}D =$	$C\hat{B}D =$



4. Justifica que os três triângulos ($[ABC]$, $[ADC]$ e $[DBC]$) são semelhantes, indicando o critério de semelhança (LLL, LAL ou AA) utilizado em cada caso.

PARES DE TRIÂNGULOS	JUSTIFICAÇÃO (Critério de Semelhança)	RELAÇÃO ENTRE OS LADOS CORRESPONDENTES
d. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$ 		$\Delta[ADC] \rightarrow$ $\overline{AC}$ ____ = ____ = ____ $\Delta[ABD] \rightarrow$
e. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$ 		____ = ____ = ____
f. $\triangle[ADC]$ e $\triangle[DBC]$ 		____ = ____ = ____

Decomposição de um triângulo pela altura referente à Hipotenusa	Quando decompomos um triângulo retângulo pela ______________________________ obtemos dois ______________________________ entre si e ______________________________ ao triângulo inicial.

A CAMINHO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Considera novamente o triângulo $[ABC]$, retângulo em C, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, tal como mostra a **Figura 4**.

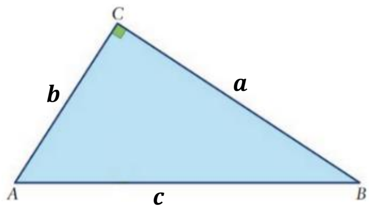


Figura 4

Sejam $[CD]$ a altura do triângulo referente à hipotenusa, $\overline{AD} = x$ e $\overline{DB} = y$ (**Figura 5**).

Logo, $x + y = \underline{\qquad}$

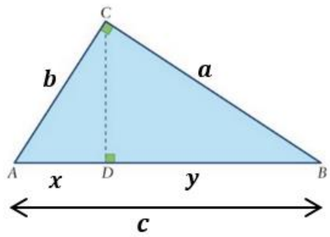


Figura 5

5. Completa as seguintes igualdades, considerando os triângulos:

A. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[ADC]$

$$\frac{\Delta[ADC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \qquad \frac{\overline{AC}}{\underline{\qquad}} = \frac{\overline{AD}}{\underline{\qquad}}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{b}{\underline{\qquad}} = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}} \Leftrightarrow b^2 = \underline{\qquad}$$

B. $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DBC]$

$$\frac{\Delta[DBC] \rightarrow}{\Delta[ABC] \rightarrow} \qquad \frac{\underline{\qquad}}{\overline{AB}} = \frac{\underline{\qquad}}{\overline{BC}}$$

ou seja, substituindo

$$\frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}} = \frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}} \Leftrightarrow \underline{\qquad} = yc$$

6. Observando a **Figura 5** e tendo em atenção os resultados **A.** e **B.** obtidos na questão anterior, completa as igualdades:

$$a^2 + b^2 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \times (\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) = \underline{\qquad} \times \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Fatorizando

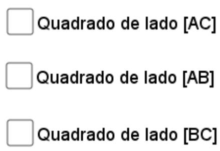
Conclusão	$a^2 + b^2 = c^2$ Onde a , b e c são, respetivamente, os dois catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Acede ao ficheiro Tarefa 4.ggb e abre-o.

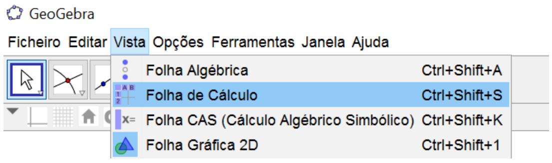
Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A.

7. Visualiza os quadrados construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado, clicando sobre ***Quadrado de lado*** $[AC]$, ***Quadrado de lado*** $[AB]$ e ***Quadrado de lado*** $[BC]$, na Folha Gráfica.



8. Visualiza a área de cada um dos quadrados, clicando sobre ***Área Azul***, ***Área Verde*** e ***Área Vermelha***, na Folha Gráfica.

9. Abre uma folha de cálculo: **Vista** → **Folha de Cálculo**.



Aparece uma **Folha de Cálculo** do lado direito do ecrã, onde algumas células já se encontram preenchidas.

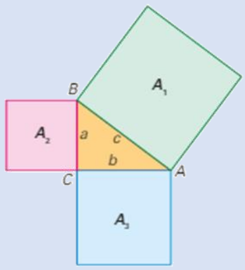
Movimentando um dos pontos $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$, verifica o que acontece.

____

____

10. Completa a tabela com um dos casos visualizados.

<table>
<tr><th>Área do quadrado de lado $[AC]$</th><th>Área do quadrado de lado $[AB]$</th><th>Área do quadrado de lado $[CB]$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$+ \qquad =$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">**Conclusão**</td><td colspan="2">Num triângulo retângulo, a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à medida da área do quadrado contruído sobre a hipotenusa.</td></tr>
<tr><td></td><td>$A_1 = A_2 + A_3$</td></tr>
</table>

11. **Será que esta propriedade apenas se verifica com quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo?**

Vamos verificar com semicírculos e triângulos equiláteros.

Acede ao ficheiro **Tarefa 5.ggb** e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A.

A. Semicírculos, cuja medida do diâmetro é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo;

12. Visualiza os semicírculos construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado.

13. Visualiza a área de cada um dos semicírculos.

14. Visualiza a **Folha de Cálculo**. Movimentando um dos pontos $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$, verifica o que acontece. ____

____

Área do semicírculo de diâmetro $[AC]$	Área do semicírculo de diâmetro $[AB]$	Área do semicírculo de diâmetro $[CB]$
+	=	

B. Triângulos Equiláteros, cuja medida do comprimento do lado é igual à medida do comprimento do respetivo lado do triângulo retângulo.

15. Desseleciona os semicírculos construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado e as respetivas áreas.

16. Visualiza os triângulos equiláteros construídos sobre cada um dos lados do triângulo dado.

17. Visualiza a área de cada um dos triângulos equiláteros.

18. Visualiza a **Folha de Cálculo**. Movimentando um dos pontos $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$, verifica o que acontece. ____

____

Área do triângulo equilátero de lado $[AC]$	Área do triângulo equilátero de lado $[AB]$	Área do triângulo equilátero de lado $[CB]$
+	=	

Conclusão	O Teorema de Pitágoras também se pode concluir se considerarmos outras figuras geométricas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, nomeadamente semicírculos e triângulos equiláteros.

Parte II

A MATEMÁTICA NA ANTIGUIDADE

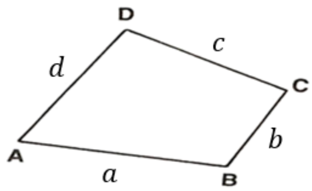
O Papiro de Rhind e os problemas geométricos…

É o documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia, e de onde provém grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática. Foi comprado em 1858, por Alexander Henry Rhind e, atualmente, encontra-se no Museu Britânico.

O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e consta de 87 problemas, dos quais alguns são geométricos, em escrita hierática. Foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, daí ser conhecido também por papiro de Ahmes, que, por sua vez, o copiou de um texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

Áreas de Quadriláteros Convexos

Considera um quadrilátero convexo de lados sucessivos a , b , c e d.
Os geómetras egípcios da Antiguidade usavam a fórmula:



$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) \qquad \textbf{(1)}$$

para calcular a área (A) de um quadrilátero convexo.

Como se designam os lados a e c do quadrilátero? ______________________________

Acede ao ficheiro **Papiro_Rhind.ggb** e abre-o.
Os seletores:

- $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AD}$ referem-se aos comprimentos dos lados do quadrilátero $[ABCD]$;
- seletor $\boldsymbol{\alpha}$ refere-se à amplitude de um dos ângulos internos do quadrilátero $[ABCD]$, neste caso, do ângulo BAD.

Consoante a medida do comprimento dos lados e da amplitude do ângulo interno, visualizarás:

- a classificação do quadrilátero correspondente;
- a fórmula convencional para a sua área e o respetivo cálculo;
- fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para a sua área e o respetivo cálculo.

Abrindo a Folha de Cálculo (menu **VISTA** → **Folha de Cálculo)** podes observar:

- na **coluna A** - a área do quadrilátero convexo considerado utilizando a fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios;
- na **coluna C** - o **Erro Cometido** (diferença entre essas duas áreas);
- na **coluna D** – a amplitude de α.

1. Desloca os seletores para obteres os quadriláteros que te são pedidos nas próximas questões.

No preenchimento das tabelas que se seguem, deverás ter em conta o seguinte:

- na **Representação** – desenhar o quadrilátero que pretendes e indicar as medidas dos comprimentos considerados bem como do ângulo interno considerado;
- na **Fórmula Convencional** e na **Fórmula dos geómetras egípcios** - indicar as medidas dos comprimentos considerados. Terás o apoio ao cálculo das áreas na folha gráfica e/ou na **Folha de Cálculo**.

a. Mostra que esta fórmula utilizada pelos egípcios **(1)** está correta no caso de o quadrilátero ser um retângulo. Para isso, após a representação do retângulo que pretendes analisar, compara a sua área considerando a fórmula convencional e a fórmula utilizada pelos egípcios.

Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Retângulo		$A = c \times l$	$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$

Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Quadrado		$A = l^2$	$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$

Comparando o resultado obtido pela fórmula convencional com o resultado obtido pela fórmula dos egípcios, o que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do retângulo? ____
- do quadrado? ____

b. Será que o mesmo acontece para este tipo de paralelogramos? Repete o processo anterior, considerando paralelogramos não retângulos.

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Paralelogramo Obliquângulo		$A = b \times h$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Compara os dois resultados obtidos em cada paralelogramo. O que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

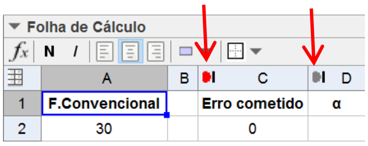
- do paralelogramo obliquângulo? ________________________________
- do losango? ____

2. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

____

3. Desloca o seletor α para $90°$.

4. Na Folha de Cálculo, clica sobre os símbolos que se encontram nas **células C** e **D**, os quais devem ficar vermelhos.



5. Desloca o seletor α até ao valor mínimo. As **colunas C** e **D** preencher-se-ão automaticamente com o **Erro Cometido** e a amplitude do ângulo α, respetivamente.

6. Observa as **colunas C** e **D**.

Qual a amplitude de α quando o **Erro Cometido** é:

- igual a zero? $\alpha =$ ______
- máximo? $\alpha =$ ______

Completa:

*À medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do **Erro cometido*** ________

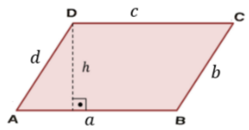
7. O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

____

____

8. Vamos mostrar em que casos a igualdade seguinte se verifica, ou seja, em que paralelogramos a área calculada usando a fórmula convencional é igual à área calculada usando a fórmula dos geómetras egípcios:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

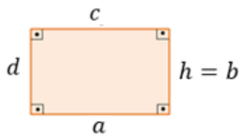


No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$.

Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica?

____

Então,



$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

Como a e c são lados ______________ do paralelogramo, logo, a ___ c assim como $b =$ ___.

Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a+a)(b+\_\_\_) \Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Leftrightarrow A = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Onde se conclui que: $\Leftrightarrow \; A = a \times b$

9. Como pudeste concluir na **questão 1.**, nem sempre a área de um paralelogramo é igual quando calculada usando fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios. Vamos mostrar que, na realidade, para um quadrilátero convexo, é verdade que:

$$A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

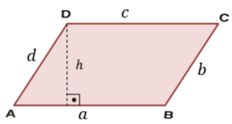
ou seja, a área calculada pela fórmula convencional é sempre menor ou igual à área quando calculada pela fórmula dos egípcios.

Área de um Paralelogramo

$A = base \times altura$

ou seja,

$A = a \times h$



Repara que, dependendo do paralelogramo, a medida da altura (h) é menor ou igual à medida do lado (b), ou seja: $h \le b$.

Se multiplicarmos ambos os membros por a:

$$\times a \qquad h \le b$$

$$\underbrace{\underline{\quad\quad} \times h}_{} \le \underline{\quad\quad} \times b$$

Sabendo que $A = a \times h$, então $\underline{\quad\quad} \le \underline{\quad\quad\quad\quad}$

E como, $$A = a \times b = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

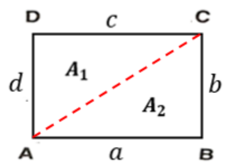
Concluindo que $$\boxed{A \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d)}$$

10. Como terão os egípcios chegado à fórmula **(1)**?

Os egípcios conheciam, possivelmente, a regra para o cálculo da área de triângulos.

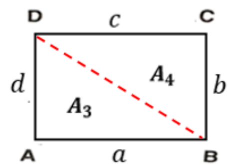
Vamos tentar fazer como eles!

Uma possível explicação para chegar a esta fórmula seria:



$$A_1 = \frac{c \times d}{2} = \frac{cd}{2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\underline{\quad\quad}}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}}$$



$$A_3 = \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} \quad \text{e} \quad A_4 = \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}}$$

$$A_3 + A_4 = \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} + \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{\underline{\quad}}$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por ___

$$A = \frac{cd + \quad + \quad + \quad}{2} \div 2 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{2} \times \frac{\underline{\quad\quad}}{\underline{\quad}} = \frac{ab + ad + bc + cd}{\underline{\quad}}$$

Fatorizando,

$$A = \frac{a(\quad + \quad) + c(\quad + \quad)}{\underline{\quad}} = \frac{(a+c)(\quad + \quad)}{\underline{\quad}} = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

Terá sido este o raciocínio utilizado pelos geómetras egípcios?

Anexo F – Ficha de Trabalho 9.º ano

FICHA DE TRABALHO

Matemática – 9.º ano **fevereiro de 2017**

Parte I

A UM PASSO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Acede ao ficheiro Tarefa 6.ggb e abre-o.

Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em A, e o seletor α (que indica a amplitude de um dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Os pontos A, D, F e B são pontos móveis, ou seja, são pontos que se podem deslocar para obter outros triângulos retângulos.

1. Visualiza os segmentos de reta $[DE]$ e $[FG]$ perpendiculares ao segmento de reta $[AB]$. Com o rato, desloca os pontos D e F.

2. Justifica que os triângulos $[ABC]$, $[DBE]$ e $[FBG]$ são semelhantes entre si, indicando o critério de semelhança que utilizaste.

   ____

   ____

3. Desloca o seletor para considerares uma amplitude para o ângulo α: $\alpha =$ ____°

4. Completa a tabela com as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos triângulos.

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$
Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude α			
Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude α			
Comprimento da hipotenusa			

5. Usando os valores registados na tabela anterior, completa a tabela seguinte e calcula:

	$\triangle\,[ABC]$	$\triangle\,[DBE]$	$\triangle\,[FBG]$	**Razão Trigonométrica**
$\dfrac{\text{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude } \alpha}{\text{Comprimento da hipotenusa}}$				Seno: $sen\ \alpha$
$\dfrac{\text{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude } \alpha}{\text{Comprimento da hipotenusa}}$				Cosseno: $cos\ \alpha$
$\dfrac{\text{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude } \alpha}{\text{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude } \alpha}$				Tangente: $tan\ \alpha$

6. Observa os valores obtidos em cada uma das linhas da tabela anterior.

O que concluis em relação às razões calculadas em cada linha?

____

Porque se verificará isso? ____

7. Desloca o seletor para considerares outra(s) amplitude(s) para o ângulo α.

O que podes concluir?

____

8. Admite que se constrói outro triângulo retângulo semelhante aos da construção apresentada.

O que podes concluir quanto ao valor da razão entre:

a. o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α ? __________

b. o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa? __________

c. o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa? __________

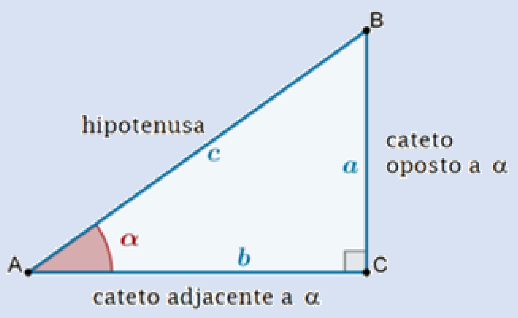
9. Visualiza a **Folha de Cálculo** (em *Vista* → *Folha de Cálculo*) onde se encontram as razões trigonométricas $seno$, $cosseno$ e $tangente$ do ângulo considerado.

Desloca várias vezes o seletor α e observa na Folha de Cálculo os valores obtidos.

Entre que valores variam as razões trigonométricas $seno$ e $cosseno$ de um ângulo agudo?

____

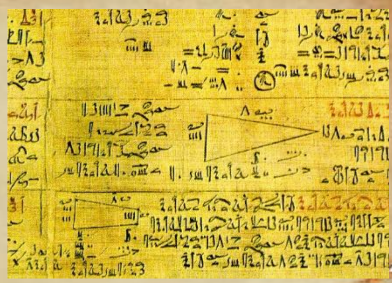
10. Completa, utilizando as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$:

Razões Trigonométricas de um Ângulo Agudo	 $\boldsymbol{sen\ \alpha} = ——$ $\boldsymbol{cos\ \alpha} = ——$ $\boldsymbol{tan\ \alpha} = ——$

Parte II

A MATEMÁTICA NA ANTIGUIDADE

O Papiro de Rhind e os problemas geométricos…

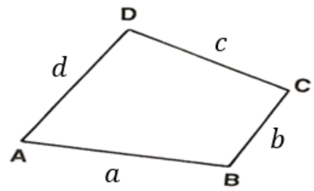


É o documento que melhor nos dá a conhecer a Matemática egípcia, e de onde provém grande parte dos nossos conhecimentos da Matemática. Foi comprado em 1858, por Alexander Henry Rhind e, atualmente, encontra-se no Museu Britânico.

O papiro de Rhind tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e consta de 87 problemas, dos quais alguns são geométricos, em escrita hierática. Foi escrito em 1650 a. C., pelo escriba Ahmes, daí ser conhecido também por papiro de Ahmes, que, por sua vez, o copiou de um texto mais antigo, de cerca de 200 anos antes.

Áreas de Quadriláteros Convexos

Considera um quadrilátero convexo de lados sucessivos a , b , c e d.
Os geómetras egípcios da Antiguidade usavam a fórmula:



$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) \quad \textbf{(1)}$$

para calcular a área (A) de um quadrilátero convexo.

Como se designam os lados a e c do quadrilátero? ________________________________

Acede ao ficheiro Papiro_Rhind.ggb e abre-o.
Os seletores:

- $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AD}$ referem-se aos comprimentos dos lados do quadrilátero $[ABCD]$;
- seletor $\boldsymbol{\alpha}$ refere-se à amplitude de um dos ângulos internos do quadrilátero $[ABCD]$, neste caso, do ângulo BAD.

Consoante a medida do comprimento dos lados e da amplitude do ângulo interno, visualizarás:

- a classificação do quadrilátero correspondente;
- a fórmula convencional para a sua área e o respetivo cálculo;
- fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para a sua área e o respetivo cálculo.

Abrindo a Folha de Cálculo (menu **VISTA** → **Folha de Cálculo)** podes observar:

- na **coluna A** - a área do quadrilátero convexo considerado utilizando a fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios;
- na **coluna C** - o **Erro Cometido** (diferença entre essas duas áreas);
- na **coluna D** – a amplitude de α.

1. Desloca os seletores para obteres os quadriláteros que te são pedidos nas próximas questões.

No preenchimento das tabelas que se seguem, deverás ter em conta o seguinte:

- na **Representação** – desenhar o quadrilátero que pretendes e indicar as medidas dos comprimentos considerados bem como do ângulo interno considerado;
- na **Fórmula Convencional** e na **Fórmula dos geómetras egípcios** - indicar as medidas dos comprimentos considerados. Terás o apoio ao cálculo das áreas na folha gráfica e/ou na **Folha de Cálculo**.

a. Mostra que esta fórmula utilizada pelos egípcios **(1)** está correta no caso de o quadrilátero ser um retângulo. Para isso, após a representação do retângulo que pretendes analisar, compara a sua área considerando a fórmula convencional e a fórmula utilizada pelos egípcios.

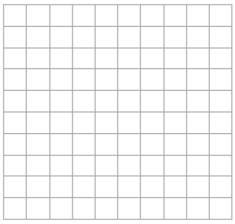
Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Retângulo		$A = c \times l$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

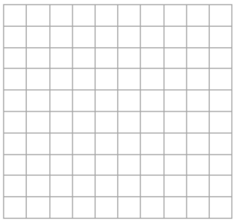
Quadrilátero	**Representação**	**Fórmula convencional:**	**Fórmula dos geómetras egípcios:**
Quadrado		$A = l^2$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Comparando o resultado obtido pela fórmula convencional com o resultado obtido pela fórmula dos egípcios, o que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

- do retângulo? ____
- do quadrado? ____

b. Será que o mesmo acontece para este tipo de paralelogramos? Repete o processo anterior, considerando paralelogramos não retângulos.

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Paralelogramo Obliquângulo		$A = b \times h$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Quadrilátero	Representação	Fórmula convencional:	Fórmula dos geómetras egípcios:
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$	$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Compara os dois resultados obtidos em cada paralelogramo. O que podes concluir em relação a cada uma das áreas:

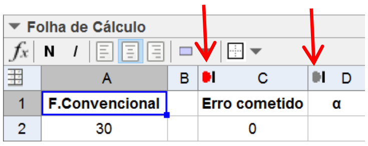
- do paralelogramo obliquângulo? ______________________________
- do losango? ____

2. Será que os geómetras egípcios tiveram em consideração todos os elementos geométricos dos quadriláteros convexos? Se não tiveram, qual(is)?

____

3. Desloca o seletor α para $90°$.

4. Na Folha de Cálculo, clica sobre os símbolos que se encontram nas **células C e D**, os quais devem ficar vermelhos.



5. Desloca o seletor α até ao valor mínimo. As **colunas C e D** preencher-se-ão automaticamente com o **Erro Cometido** e a amplitude do ângulo α, respetivamente.

6. Observa as **colunas C** e **D**.

Qual a amplitude de α quando o **Erro Cometido** é:

- igual a zero? $\alpha =$ _______
- máximo? $\alpha =$ _______

Completa:

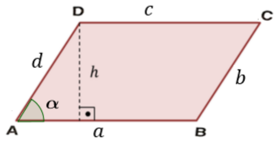
*À medida que a amplitude do ângulo α diminui, o valor do **Erro cometido*** __________

7. O que achas que deveria ser substituído/considerado na fórmula utilizada pelos geómetras egípcios para passarmos a ter uma fórmula válida para qualquer paralelogramo (retângulo, quadrado, paralelogramo obliquângulo e losango)?

____

____

- Confirma a tua resposta utilizando os teus conhecimentos sobre Trigonometria.



Como a e c são lados __________________ do paralelogramo, logo, a ___ c assim como $b =$ ___.
Substituindo na fórmula:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{4}(a+\underline{\qquad})(b+\underline{\qquad}) = \frac{\qquad \times \qquad}{4} = \frac{\qquad\qquad}{4} = \underline{\qquad}$$

$$\boxed{A = a \times b}$$

Determina uma expressão que te permita calcular a altura (h) do paralelogramo, utilizando as razões trigonométricas:

$$\underline{\qquad}\ \alpha = \frac{\qquad}{b} \Leftrightarrow h = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Para a fórmula ser válida teríamos de ter

$$A = a \times h$$

Substituindo h pela expressão encontrada:

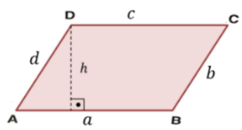
$$\boxed{A = a \times \underline{\qquad\qquad\qquad}}$$

Então, para termos uma fórmula válida para qualquer paralelogramo, teríamos de ________________________ a expressão $A = a \times b$ por ___________.

8. Em que casos a igualdade seguinte se verifica, ou seja, em que paralelogramos a área calculada usando a fórmula convencional é igual à área calculada usando a fórmula dos geómetras egípcios:

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

No *GeoGebra*, desloca o(s) seletor(es) que entenderes de modo que $h = b$.
Em que paralelogramo(s) é que isso se verifica?



____

9. Como pudeste concluir na **questão 1.**, nem sempre a área de um paralelogramo é igual quando calculada usando fórmula convencional e a fórmula dos geómetras egípcios.
Vamos mostrar que, na realidade, para um quadrilátero convexo, é verdade que:

$$A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

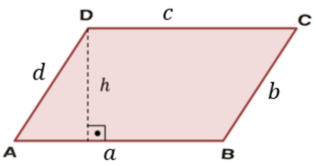
ou seja, a área calculada pela fórmula convencional é sempre menor ou igual à área quando calculada pela fórmula dos egípcios.

Área de um Paralelogramo

$$A = base\ \times\ altura$$

ou seja,

$$A = a\ \times\ h$$



Repara que, dependendo do paralelogramo, a medida da altura (h) é menor ou igual à medida do lado (b), ou seja: $h \leq b$.

Se multiplicarmos ambos os membros por a:

$$\times\ a \qquad h \leq b$$

$$\underbrace{\_\_\_ \times\ h}\ \leq \_\_\_ \times\ b$$

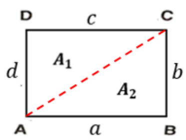
Sabendo que $A = a\ \times\ h$, então $\_\_\_ \leq \_\_\_\_\_\_\_\_\_$

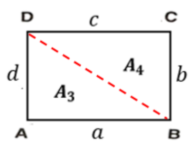
E como, $A = a \times b = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$

Concluindo que $\boxed{A \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)}$

10. Como terão os egípcios chegado à fórmula **(1)**?

Os egípcios conheciam, possivelmente, a regra para o cálculo da área de triângulos.
Vamos tentar fazer como eles!
Uma possível explicação para chegar a esta fórmula seria:





$A_1 = \frac{c \times d}{2} = \frac{cd}{2}$ e $A_2 = \frac{\quad}{2}$ | $A_3 = \frac{\quad}{\_\_\_}$ e $A_4 = \frac{\quad}{\_\_\_}$

$A_1 + A_2 = \frac{\quad}{\_\_\_} + \frac{\quad}{\_\_\_}$ | $A_3 + A_4 = \frac{\quad}{\_\_\_} + \frac{\quad}{\_\_\_}$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{\quad + \quad + \quad + \quad}{\_\_\_}$$

Fatorizando,

$$A = \frac{a(\_\_\_ + \_\_\_) + c(\_\_\_ + \_\_\_)}{\_\_\_} = \frac{(a+c)(\_\_\_ + \_\_\_)}{\_\_\_} = \frac{1}{\_\_\_}(\_\_\_ + \_\_\_)(\_\_\_ + \_\_\_)$$

Como calculavam duas vezes a área do quadrilátero tinham de, no final, dividir por __

$$A = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \div \_\_\_ = \frac{1}{2}(\_\_\_ + \_\_\_)(\_\_\_ + \_\_\_) \times \frac{\quad}{\_\_\_}$$
$$= \frac{\quad}{\_\_\_}(\_\_\_ + \_\_\_)(\_\_\_ + \_\_\_)$$

Terá sido este o raciocínio utilizado pelos geómetras egípcios?

Anexo G – Grelha de Observação

GRELHA DE OBSERVAÇÃO

Matemática – __.º ano / Turma ______ ____________________ de 2017

Aluno		Motivação	Tarefa			Folha de Cálculo		*GeoGebra*	
			Interpretação	Autonomia	A visualização permitiu tirar conclusões?	Mais valia	Distratora	Domínio	Interação com o *software*
1									
2									
3									
4									
5									
6									

<table>
<tr><th rowspan="2">TURMA</th><th rowspan="2">Motivação</th><th colspan="3">Tarefa</th><th colspan="2">Folha de Cálculo</th><th colspan="2">GeoGebra</th></tr>
<tr><th>Interpretação</th><th>Autonomia</th><th>A visualização permitiu tirar conclusões?</th><th>Mais valia</th><th>Distratora</th><th>Domínio</th><th>Interação com o software</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>OBSERVAÇÕES DE OUTROS PARÂMETROS</td><td colspan="8"></td></tr>
</table>

Anexo H – Grelha de Observação 9.º ano – Parte I

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CAMPO MAIOR

GRELHA DE OBSERVAÇÃO

Matemática - 9.º ano / Turma B — 23 de Fevereiro de 2017

Aluno		Motivação	Tarefa			Folha de Cálculo		*GeoGebra*	
			Interpretação	Autonomia	A visualização permitiu tirar conclusões?	Mais valia	Distratora	Domínio	Interação com o *software*
1	B7	Muito Bom	Sem dificuldades	Mostrou autonomia	Sim	+	Não	Não aplicável	Manipulação pela professora
2	B6	Bom	Sem dificuldade	Mostrou	Sim	+	Não		
3	B13	Muito Bom	com ajuda	Mostrou	Sim	+	Não		
4	B10	Bom	Sem dificuldade	Mostrou	Sim	+	Não		
5	B18	Muito Bom	Sem dificuldade	Mostrou	Sim	+	Não		
6	B17	Muito Bom	com ajuda	Mostrou	Sim	+	Não		

TURMA	Motivação	Tarefa			Folha de Cálculo		*GeoGebra*	
		Interpretação	Autonomia	A visualização permitiu tirar conclusões?	Mais valia	Distratora	Domínio	Interação com o *software*
	Os alunos mostraram-se motivados ("comparativamente com outras atividade" - Prof. da Turma)	Alguns alunos, embora poucos, mostraram alguns problemas na interpretação.	Alguns alunos mostraram pouca autonomia, mas no geral, foram autónomos!	Sim, os alunos tiraram conclusões, que sem a visualização teriam mais dificuldade ou não conseguiriam (alguns)	+	No geral, não foi distratora, tirando para um ou outro aluno que se distraíram.	Não aplicável	manipulação pela professora
OBSERVAÇÕES DE OUTROS PARÂMETROS	Tendo em conta a natureza da turma, ou seja, turma com alunos que apresentam algumas dificuldades, com pouca autonomia, pode-se considerar que a atividade revelou-se uma mais-valia. Os alunos, na sua maioria, mostraram-se empenhados e colaborantes. No entanto, outros alunos, embora poucos, consideraram difícil a tarefa. (Docente da turma + prof. investigadora)							

Anexo I – Guião da Entrevista

GUIÃO DA ENTREVISTA

1. **Identificação do Aluno**

2. **Conceções sobre a Matemática**
    - O que é que pensas da Matemática?
    - Para que serve a Matemática?
    - Achas que os alunos podem descobrir coisas em Matemática ou todas as coisas têm que lhes ser ensinadas?

3. **Atitudes face à Matemática e às aulas de Matemática**
    - Achas importante estudar Matemática? Porquê?
    - Consideras-te um aluno bom, médio ou fraco a Matemática?
    - Costumas estudar Matemática fora das aulas? Se sim, como o costumas fazer? Sozinho ou com ajuda de alguém?
    - O que é para ti o mais importante nesta disciplina? Porquê?
    - Quando tens dificuldades a Matemática o que costumas fazer?
    - O que gostas mais de fazer a Matemática? Porquê? O que menos gostas de fazer em Matemática? Porquê?
    - Que tipo de tarefa gostas mais de realizar nas aulas de Matemática (exercícios, investigações, resolução de problemas, jogos, trabalhos de grupo)? Porquê?
    - Como seria para ti uma boa aula de Matemática?
    - Se fosses professor de Matemática, como farias para que os alunos aprendessem verdadeiramente?

4. **Atitudes face à utilização do *software* <u>GeoGebra</u> nas aulas de Matemática**
    - Achas que trabalhar com o *software* <u>*GeoGebra*</u> é interessante?
    - Achas que trabalhar com o *software* <u>*GeoGebra*</u> é útil?
    - Preferes aulas com ou sem recurso ao <u>*GeoGebra*</u>? Porquê?
    - Se puderes, vais utilizar com o *software* <u>*GeoGebra*</u> novamente?

5. **Como correu a experiência**

    (Neste ponto o aluno deve ter acesso ao enunciado das duas tarefas realizadas)
    - O que achaste da experiência?
      Procura descrever, de uma forma geral, o trabalho desenvolvido pelo grupo na exploração das tarefas (como é que se organizaram, como é que geriram o tempo,... – para contextualizar o aluno).
    - O que achaste mais motivador na experiência?

- O que achaste mais positivo na realização da experiência?
- Onde sentiram mais dificuldades?
- Achas importante que as tarefas aplicadas estejam disponíveis na *Internet* para utilização futura?

6. **Motivação para a disciplina**
    - O que achas que uma aula de matemática deveria ter de forma a se sentirem motivados pela disciplina? E que motivassem os teus colegas?

Anexo J – Questionário TIC (Professores)

A UTILIZAÇÃO DAS TIC[3] E AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA[4] NO ENSINO

Questionário

Este questionário pretende saber a sua opinião sobre a experiência que tem na utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação. Será preservado o anonimato e a confidencialidade dos seus dados recolhidos. A sua colaboração no preenchimento deste questionário é muito importante.

Parte I

Assinale com X a quadrícula que melhor corresponde à sua escolha:

1. Dados do professor

1.1. Género ☐ Masculino ☐ Feminino

1.2. Quantos anos tem de experiência de ensino?

☐ Menos de 5 anos ☐ Entre 5 e 10 anos ☐ Entre 11 e 15 anos

☐ Entre 16 e 20 anos ☐ Mais de 21 anos

Parte II

Assinale com X uma das quadrículas à direita que melhor corresponde à sua escolha:

2. Utilização geral de Computadores

2.1. Utiliza computadores na sala de aula? ☐ Sim ☐ Não

Se respondeu **sim**, continue a responder ao questionário.

Se respondeu **não**, por favor termine aqui.

---

[3] Tecnologias de Informação e Comunicação.

[4] *Software* de construção que nos oferece "régua e compasso eletrónicos".

Instruções de Preenchimento	Nas questões seguintes, assinala com uma cruz a quadrícula correspondente: ① - todas as vezes; ② - muitas vezes; ③ - às vezes; ④ - poucas vezes; ⑤ - nunca.

2.2. De que modo é feita a organização dos alunos nas aulas com utilização de computadores?

	①	②	③	④	⑤
De forma individual	☐	☐	☐	☐	☐
A pares	☐	☐	☐	☐	☐
Pequenos grupos	☐	☐	☐	☐	☐
Trabalho num único grupo – turma	☐	☐	☐	☐	☐
Depende da tarefa/atividade a desenvolver	☐	☐	☐	☐	☐
Outro: ______________________	☐	☐	☐	☐	☐

3. Utilização de *software* de Geometria Dinâmica

3.1. Dos seguintes *softwares* de Geometria Dinâmica, assinale o(s) que conhece?

Cabri Géométre	☐
GeoGebra	☐
Cinderella	☐
C.a.R	☐
Geometer's Sketchpad	☐
Nenhum	☐
Outro: ______________________	☐

3.2. Costuma utilizar *softwares* de Geometria Dinâmica? ☐ Sim ☐ Não

Se respondeu **sim**, continue a responder ao questionário.

Se respondeu **não**, por favor passe para a questão **5.**.

3.3. Dos seguintes *softwares* de Geometria Dinâmica, assinale o(s) que costuma utilizar?

- *Cabri Géométre* ☐
- *GeoGebra* ☐
- *Cinderella* ☐
- *C.a.R* ☐
- *Geometer's Sketchpad* ☐
- Outro: ________________________________ ☐

3.4. Em que situação(ões) utilizou o(s) *software*(s) anterior(es)?

- Em sala de aula ☐
- Para apresentar um tópico ☐
- Para preparar as aulas ☐
- Para os alunos trabalharem em grupos ☐
- Indicação de alguns passos do trabalho de casa dos alunos ☐
- Outro: ________________________________ ☐

3.5. Com que frequência utiliza ambientes de Geometria Dinâmica nas atividades letivas?

- Em todas as aulas ☐
- Uma a duas aulas por semana ☐
- Uma a duas aulas por mês ☐
- Entre uma a duas aulas por período ☐
- Sempre que possível ☐
- Sempre que se justifique ☐
- Outra: ________________________________ ☐
- Não utilizo ☐

4. Utilização do *GeoGebra*

4.1. Conhece o *software Geogebra*? ☐ Sim ☐ Não

4.2. Já utilizou este *software* nas suas atividades letivas? ☐ Sim ☐ Não

4.3. Como aprendeu a usar o *software GeoGebra*?

- Frequentando formações ☐
- Por iniciativa própria ☐
- Com a ajuda de um colega ☐
- Outro: ________________________________ ☐

4.4. Como considera o seu grau de conhecimento na utilização do *software* *GeoGebra*?

- Domino o *software* ☐
- Utilizo com facilidade ☐
- Preciso de ajuda para o utilizar ☐
- Outro: ________________________________ ☐

4.5. Este *software* facilita o ensino dos conteúdos? ☐ Sim ☐ Não

4.6. A visualização dos conteúdos abordados utilizando o *software* *GeoGebra* facilitou/facilita a sua aprendizagem mais do que utilizando o quadro?

☐ Sim ☐ Não

4.7. Em qual(ais) domínios já usou/usa o *software* *GeoGebra*?

- Números e Operações (NO) ☐
- Geometria e Medida (GM) ☐
- Funções, Sequências e Sucessões (FSS) ☐
- Organização e Tratamento de Dados (OTD) ☐

5. Atitude perante as TIC

5.1. Perceção dos professores perante a utilização das TIC em atividades letivas.

	①	②	③	④	⑤
O desempenho das minhas aulas é melhor;	☐	☐	☐	☐	☐
Novas possibilidades metodológicas surgem nas minhas aulas;	☐	☐	☐	☐	☐
Os meus alunos estão mais motivados para trabalhar;	☐	☐	☐	☐	☐
Melhora e facilita a comunicação professor-aluno;	☐	☐	☐	☐	☐
Melhora e facilita a aprendizagem dos alunos;	☐	☐	☐	☐	☐
Melhora a avaliação dos alunos;	☐	☐	☐	☐	☐
Ajuda no trabalho repetitivo do professor;	☐	☐	☐	☐	☐
Pode criar ansiedade;	☐	☐	☐	☐	☐
Pode distrair-nos dos principais objetivos da aprendizagem, quando utilizada em sala de aula;	☐	☐	☐	☐	☐
Facilita o ensino para os professores, em sala de aula;	☐	☐	☐	☐	☐
Os alunos avaliam o meu trabalho de forma mais positiva.	☐	☐	☐	☐	☐

Observações

Utilize este espaço para incluir sugestões, justificações referentes às suas respostas ou outras observações que julgue convenientes.

Fim do Questionário

Obrigada pela sua colaboração!